

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
GUILLAUME BROUILLETTE

CLASSIFICATION DES COUPES TRIDIMENSIONNELLES
PRINCIPALES DES MULTIBROTS MULTICOMPLEXES

JUILLET 2019

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Dominic Rochon, directeur de recherche
Département de mathématiques et d'informatique, UQTR

M. Alain Goupil, membre du jury
Département de mathématiques et d'informatique, UQTR

M. Fadel Toure, membre du jury
Département de mathématiques et d'informatique, UQTR

AVANT-PROPOS

Les nombres complexes m'ont fasciné à partir du moment où j'ai appris leur existence. Au secondaire, on m'avait toujours dit que la racine carrée d'un nombre négatif « n'existait pas ». Quand j'ai appris qu'il y avait des nombres au-delà des réels, les nombres complexes, ça a changé ma vision des mathématiques. J'ai alors compris que, en mathématiques, il est toujours possible de pousser plus loin les concepts connus. À ce moment, j'ai commencé à vouloir entamer une carrière en recherche afin de, moi aussi, faire avancer le domaine.

Ma maîtrise m'a donné la possibilité d'explorer l'espace des nombres complexes et leurs généralisations. En particulier, j'ai pu en apprendre davantage sur les fractales multicomplexes, qui ont été au cœur de mon mémoire. Je tiens donc à remercier Dominic Rochon, mon directeur de recherche, qui m'a donné l'opportunité d'étudier ce sujet captivant. Je remercie aussi Alain Goupil, qui m'a initié à la recherche dans le domaine de la combinatoire pendant deux étés.

De plus, je tiens à remercier le Fonds de recherche du Québec - Nature (dossier 206757) ainsi que l'Institut des sciences mathématiques, qui m'ont soutenu financièrement pendant ma maîtrise. Je remercie aussi l'UQTR, en particulier le département de mathématiques et d'informatique, pour m'avoir supporté par l'intermédiaire de bourses et de divers emplois, dont une charge de cours qui a été une expérience très bénéfique pour moi.

Finalement, je tiens à mentionner ma famille, en particulier mes parents et ma conjointe, qui ont été présents pour moi tout au long de mes études.

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, on généralise plusieurs résultats connus sur les fractales complexes, bicomplexes et tricomplexes. Pour ce faire, on étudie d'abord les nombres multicomplexes, ou n -complexes, qui permettent de généraliser les nombres complexes en 2^n dimensions. À partir de ceux-ci, on définit une algèbre $\mathbb{M}(n)$ qui permet d'étendre plusieurs notions et concepts classiques liés au plan complexe en 2^n dimensions. Par exemple, on peut redéfinir les fractales complexes, telles que les ensembles de Mandelbrot et de Julia, afin d'obtenir des objets ayant 2^n dimensions.

Il est possible de visualiser ces ensembles en générant des projections tridimensionnelles de ces derniers, aussi appelées des coupes tridimensionnelles. À priori, une fractale n -complexe possède $\binom{2^n}{3}$ coupes distinctes. Cependant, plusieurs d'entre elles sont similaires. Effectivement, en étudiant les diverses coupes d'une fractale, on voit que plusieurs d'entre elles ont la même dynamique. En particulier, considérons l'ensemble de Mandelbrot généralisé suivant :

$$\mathcal{M}_n^p = \{c_0 \in \mathbb{M}(n) : c_{m+1} = (c_m)^p + c_0 \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } m \rightarrow \infty\}.$$

On peut démontrer que lorsque p est pair, \mathcal{M}_n^p ne possède que neuf dynamiques tridimensionnelles différentes et lorsque p est impair, il n'en possède que quatre.

Une grande partie de cet ouvrage est donc dédiée à l'étude des espaces multicomplexes ainsi qu'à la classification des dynamiques et coupes tridimensionnelles de \mathcal{M}_n^p . Aussi, on généralise la distance entre une fractale et un nombre multicomplexe à l'extérieur de celle-ci. Cette distance permet de générer par ordinateur des visuels des coupes fractales tridimensionnelles en utilisant la méthode du lancer de rayons.

Mots-clés : nombres multicomplexes ; Multibrot ; ensemble de Mandelbrot généralisé ; ensembles de Julia ; dynamique multicomplexe ; coupes tridimensionnelles ; fractales 3D.

ABSTRACT

In this thesis, we generalize known results concerning complex, bicomplex and tricomplex fractals. To do so, we first study the multicomplex numbers, or n -complex numbers, which are a 2^n -dimensional generalization of complex numbers. Using those numbers, we define an algebra $\mathbb{M}(n)$ which may be used to generalize many classical concepts and results from the complex plane to a 2^n -dimensional space. For instance, complex fractals, such as the Mandelbrot and Julia sets, may be extended to the multicomplex space in order to obtain 2^n -dimensional objects.

It is possible to visualize those fractal sets by generating their tridimensional projections, or tridimensional slices. A priori, a n -complex fractal possesses $\binom{2^n}{3}$ slices. However, many of them are similar. Indeed, by studying the different slices of a fractal set, we see that many of them have the same dynamics. Notably, consider the following generalized Mandelbrot set :

$$\mathcal{M}_n^p = \{c_0 \in \mathbb{M}(n) : c_{m+1} = (c_m)^p + c_0 \not\rightarrow \infty \text{ as } m \rightarrow \infty\}.$$

It can be shown that when p is even, \mathcal{M}_n^p only possesses nine tridimensional dynamics and when p is odd, it only has four.

Thus, most of this work focuses on the multicomplex spaces as well as the classification of the tridimensional dynamics and slices of \mathcal{M}_n^p . Moreover, the distance from a fractal to a multicomplex number outside that fractal is generalized. Using this distance, the ray tracing algorithm for creating 3D images can be used to generate tridimensional fractal slices visuals.

Keywords : multicomplex numbers ; Multibrot set ; generalized Mandelbrot set ; Julia sets ; multicomplex dynamics ; tridimensional slices ; 3D fractals.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Chapitre 1 Espaces multicomplexes	5
1.1 Notions de base	5
1.2 Représentation canonique et conjugaisons	8
1.3 Représentation idempotente	15
1.4 Inversibilité d'un nombre multicomplexe	21
1.5 Norme multicomplexe	24
1.6 Propriétés des espaces multicomplexes	32
1.7 Fonctions multicomplexes	41
Chapitre 2 Mandelbrot et Julia généralisés	49
2.1 Multibrots	49
2.2 Ensembles de Julia remplis	56
Chapitre 3 Coupes fractales tridimensionnelles	65
3.1 Définitions	65
3.2 Équivalence entre les coupes principales	68
3.3 Implication de la relation d'équivalence	76
Chapitre 4 Classification des coupes principales	79
4.1 Explicitation des espaces des itérées	79
4.2 Classes d'équivalence des coupes principales	86
4.3 Optimalité de l'espace tricomplexe	95
4.4 Caractérisation du Métabrot	100
Chapitre 5 Lancer de rayons	107
5.1 Distance d'un point à une fractale complexe	107
5.2 Distance d'un point à une fractale multicomplexe	120
5.3 Méthode du lancer de rayons	125

Conclusion 129

Bibliographie 131

Annexe A Définitions de base 135

TABLE DES FIGURES

2.1	L'ensemble de Mandelbrot standard	50
2.2	Multibrots complexes	51
2.3	Ensembles de Julia complexes	57
3.1	Le Tétrabrot $\mathcal{T}^2(1, i_1, i_2)$	66
3.2	L'Earthbrot $\mathcal{T}_e^2(\gamma_2\gamma_3, \bar{\gamma}_2\gamma_3, \gamma_2\bar{\gamma}_3)$	68
3.3	Transformation linéaire $L(x, y, z) = \left(\frac{3x}{2} - y, x + y + \frac{z}{2}, \frac{y}{2} + \frac{3z}{2}\right)$ appliquée sur un cube unitaire	78
4.1	Coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot généralisé tricomplexe \mathcal{M}_3^2	101
4.2	Coupes tridimensionnelles principales de \mathcal{M}_3^3	102
4.3	Multibrots complexes avec axes réel et imaginaire	104

LISTE DES SYMBOLES

\mathbb{N}	Ensemble des nombres naturels (incluant 0)
\mathbb{N}^*	Ensemble des nombres naturels (excluant 0)
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{M}(n)$	Ensemble des nombres n -complexes
$\mathbb{M}(n)^{-1}$	Ensemble des nombres n -complexes inversibles
$\ \cdot\ _n$	Norme euclidienne d'un nombre n -complexe
i_1, i_2, \dots, i_n	Unités imaginaires de base
\mathbf{i}	Combinaison multiplicative d'unités imaginaires de base
j_1, j_2, j_3, j_4	Unités hyperboliques
γ	Unité idempotente
$\mathbb{I}(n)$	Base canonique de l'espace $\mathbb{M}(n)$ sur \mathbb{R}
$\mathbb{I}_k(n)$	Base canonique de l'espace $\mathbb{M}(n)$ sur $\mathbb{M}(k)$
$S_2(n)$	Base idempotente de l'espace $\mathbb{M}(n)$ sur \mathbb{C}
$S_k(n)$	Base idempotente de l'espace $\mathbb{M}(n)$ sur $\mathbb{M}(k-1)$
$X_1 \times X_2$	Produit cartésien des ensembles X_1 et X_2
$X_1 \times_{\gamma_n} X_2$	Produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien des ensembles $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$

\mathcal{M}_n^p	Multibrot n -complexe d'ordre p
$\mathcal{K}_{n,c}^p$	Ensemble de Julia n -complexe d'ordre p associé à c
$Q_{p,c}^m(\eta)$	m^e itérée du polynôme $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$
$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Espace engendré par $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$
$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Espace engendré par $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$
$\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Espace engendré par $1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$
$\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Espace engendré par les itérées $Q_{p,c}^m(0)$ où $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$
$\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Coupe tridimensionnelle principale $\mathcal{M}_n^p \cap \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$

Introduction

Les fractales complexes intéressent les mathématiciens depuis plusieurs décennies. En effet, elles ont d'abord été introduites par Fatou et Julia au début du 20^e siècle, qui se sont surtout penchés sur la dynamique de ces ensembles complexes chaotiques. Toutefois, ce n'est qu'au début des années 1980 que certains mathématiciens, dont Mandelbrot, générèrent les premières images par ordinateur de l'ensemble du même nom. Par la suite, la curiosité de plusieurs chercheurs, comme Douady et Hubbard, s'est ravivée et le domaine des fractales a énormément gagné en popularité. Depuis ce temps, comme le matériel informatique devient plus puissant d'année en année, la qualité des images s'est continuellement améliorée. De plus, puisque les ordinateurs sont aussi devenus plus accessibles, les mathématiciens ne sont plus les seuls à s'intéresser aux fractales : plusieurs artistes numériques sont maintenant passionnés par ces objets complexes, en particulier les ensembles de Mandelbrot et de Julia.

D'ailleurs, afin d'obtenir des images encore plus impressionnantes, il est possible de redéfinir les fractales en trois dimensions. En effet, comme elles sont définies habituellement dans le plan complexe, leur définition standard permet d'obtenir des images en deux dimensions. Cependant, en les définissant sur une autre algèbre ayant plus de dimensions, on obtient des ensembles fractals ayant, eux aussi, plus de dimensions. Par exemple, en utilisant les quaternions, il serait possible d'obtenir des fractales en quatre dimensions, comme l'ont fait Katunin [18] ainsi que Dang, Kauffman et Sandin [9]. En considérant les projections tridimensionnelles de celles-ci, on obtient des fractales tridimensionnelles, qui peuvent être générées par ordinateur à l'aide de certaines méthodes de synthèse d'image, comme le lancer de rayons [1, 15].

Ici, afin de généraliser les fractales, on utilisera les espaces multicomplexes $\mathbb{M}(n)$. Ceux-ci ont été étudiés pour les premières fois dans les années 1990 par Price [30] et

Rochon [31]. Les nombres multicomplexes, ou n -complexes, permettent de généraliser les nombres complexes en 2^n dimensions. À partir de ceux-ci, il est possible de définir une addition et une multiplication multicomplexes analogues aux opérations élémentaires sur les complexes. De plus, on peut démontrer que $\mathbb{M}(n)$ muni de l'addition et de la multiplication multicomplexes forme une algèbre associative, unitaire et commutative sur \mathbb{R} . En fait, on peut vérifier que $\mathbb{M}(n)$, en tant qu'espace vectoriel, est isomorphe et isométrique à \mathbb{R}^{2^n} . Il est aussi possible de démontrer que cette généralisation de \mathbb{C} forme un anneau unitaire commutatif. Bref, dû aux propriétés de $\mathbb{M}(n)$, dont la commutativité de la multiplication, les calculs dans $\mathbb{M}(n)$ se font de manière assez intuitive, ce qui rend cette généralisation de \mathbb{C} particulièrement intéressante.

Ainsi, en définissant les ensembles de Mandelbrot et de Julia dans l'espace n -complexe plutôt que complexe, on obtient des fractales en 2^n dimensions. En choisissant trois éléments d'une base de $\mathbb{M}(n)$, on peut obtenir une projection 3D d'une fractale, qu'on appelle aussi une coupe tridimensionnelle. Dépendant de la base et des unités choisies, il est possible d'obtenir une grande variété de coupes tridimensionnelles. Cependant, certaines d'entre elles sont visuellement identiques. En établissant une relation d'équivalence entre les coupes en fonction de leur dynamique, on peut trouver lesquelles sont visuellement les mêmes. En fait, dans ce mémoire, les coupes tridimensionnelles principales sont classées et on démontre, entre autres, que l'ensemble de Mandelbrot généralisé ne possède que neuf coupes tridimensionnelles principales. Ce résultat, qui représente le cœur de ce travail, permet de résoudre une conjecture établie par Parisé [26].

Essentiellement, ce mémoire a comme objectif de généraliser et d'unifier certaines notions liées aux espaces multicomplexes ainsi qu'aux fractales définies dans ces espaces. En effet, plusieurs propriétés des espaces complexes, bicomplexes et tricomplexes, démontrées entre autres dans [21, 22, 28, 30, 32], se généralisent aux espaces multicomplexes. De même, certains résultats sur les fractales d'ordre p sont démontrés dans le cas où $p = 2$ ou $p = 3$ dans certains ouvrages [12, 13, 26], mais plusieurs pourraient être démontrés pour tout entier $p \geq 2$. C'est le cas, par exemple, de la classification des coupes tridimensionnelles principales.

En résumé, voici la structure du document. Au chapitre 1, on introduit les espaces multicomplexes. Ensuite, on définit les ensembles de Mandelbrot et de Julia généralisés à ces espaces au chapitre 2. Puis, le principe de coupe tridimensionnelle et la relation

d'équivalence entre ces coupes sont présentés au chapitre 3. Au chapitre 4, les coupes principales des Multibrots sont classées selon la relation d'équivalence introduite au chapitre précédent. Finalement, le lancer de rayons est abordé et une estimation de la distance entre un point et une fractale, nécessaire à l'implémentation de la méthode, est généralisée au chapitre 5.

Remarque. En annexe, plusieurs concepts préalables au mémoire sont définis. Ainsi, le lecteur ayant à se remémorer ou à se familiariser avec certaines notions peut se référer à celle-ci.

Espaces multicomplexes

L'objectif de ce chapitre est de présenter les ensembles des nombres multicomplexes et les différentes opérations définies sur ceux-ci. De plus, on élabore certains concepts plus avancés, ce qui permettra de dresser un portrait général des espaces multicomplexes et de leurs propriétés. Aussi, on tente d'unifier et de généraliser certains résultats connus sur les nombres bicomplexes et tricomplexes présentés dans d'autres travaux, notamment [12, 21, 26, 30, 34, 35].

1.1 Notions de base

D'abord, remarquons que les nombres complexes sont obtenus en introduisant une unité imaginaire i telle que $i^2 = -1$. En effet, on sait que

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}.$$

Afin d'obtenir les nombres multicomplexes, on doit introduire d'autres unités imaginaires i_n .

Définition 1.1.1 – L'ensemble $\mathbb{C}(i_n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'unité imaginaire i_n telle que $i_n^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes associé à i_n est noté

$$\mathbb{C}(i_n) = \{x + yi_n \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Les opérations d'addition et de multiplication déjà connues sur \mathbb{C} peuvent aussi être utilisées sur les nombres de l'ensemble $\mathbb{C}(i_n)$. Muni de ces opérations, on voit que l'ensemble $\mathbb{C}(i_n)$ forme un corps. De plus, les ensembles \mathbb{C} et $\mathbb{C}(i_n)$ sont isomorphes. En

effet, on vérifie facilement que l'application $f(x + yi) = x + yi_n$ est un isomorphisme entre ces deux ensembles, c'est-à-dire que f est bijective et, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \quad \text{et} \quad f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2).$$

De même, les ensembles $\mathbb{C}(i_m)$ et $\mathbb{C}(i_n)$ sont isomorphes $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Essentiellement, on voit donc que les unités imaginaires i_n , malgré qu'elles soient distinctes, se traitent toutes de manière semblable $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons que les nombres complexes sont obtenus, en quelque sorte, en dupliquant les nombres réels. Pour obtenir les nombres multicomplexes, on procède de manière semblable.

Définition 1.1.2 – Ensemble des nombres n -complexes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des *nombres multicomplexes d'ordre n* , ou encore l'ensemble des *nombres n -complexes*, est

$$\mathbb{M}(n) = \{\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n \mid \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)\}$$

où $i_n^2 = -1$ et $\mathbb{M}(0) = \mathbb{R}$.

Remarque. En particulier, on a $\mathbb{M}(1) = \mathbb{C}(i_1)$. Ainsi, on considérera dans le reste du travail que l'ensemble complexe habituel \mathbb{C} est représenté par $\mathbb{M}(1) = \mathbb{C}(i_1)$, c'est-à-dire que l'unité imaginaire habituelle i est équivalente à i_1 . De plus, dans plusieurs ouvrages (voir [12, 13, 26, 28] par exemple), on note l'ensemble des nombres bicomplexes $\mathbb{BC} := \mathbb{M}(2)$ et l'ensemble des nombres tricomplexes $\mathbb{TC} := \mathbb{M}(3)$. Cette notation sera utilisée tout au long du travail.

Comme des opérations d'addition et de multiplication sont déjà définies sur \mathbb{C} , il est possible de les généraliser à $\mathbb{M}(n)$.

Définition 1.1.3 – Opérations élémentaires sur $\mathbb{M}(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ et $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i_n$ où $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$. Les opérations arithmétiques de base dans $\mathbb{M}(n)$ se font selon les règles suivantes :

- $\eta_1 + \eta_2 i_n = \zeta_1 + \zeta_2 i_n \Leftrightarrow \eta_1 = \zeta_1$ et $\eta_2 = \zeta_2$;
- $\eta + \zeta = (\eta_1 + \eta_2 i_n) + (\zeta_1 + \zeta_2 i_n) = (\eta_1 + \zeta_1) + (\eta_2 + \zeta_2) i_n$;
- $\eta \cdot \zeta = (\eta_1 + \eta_2 i_n)(\zeta_1 + \zeta_2 i_n) = (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2) + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1) i_n$.

Les opérations multicomplexes de base sont donc définies de manière analogue aux opérations complexes. De plus, lorsque $n \geq 2$, on peut remarquer qu'il existe des diviseurs de zéro dans $\mathbb{M}(n)$. À titre d'exemple, on peut calculer que $(i_1 + i_2)(i_1 - i_2) = 0$. À la section 1.4, on identifiera plus exactement quels nombres sont non inversibles et, par conséquent, des diviseurs de zéro.

L'ensemble $\mathbb{M}(n)$ muni de l'addition et la multiplication telles que définies précédemment permet d'obtenir une structure algébrique riche.

Proposition 1.1.4

L'ensemble $\mathbb{M}(n)$ muni des opérations d'addition et de multiplication forme une algèbre sur \mathbb{R} unitaire et commutative, c'est-à-dire que

- i) l'addition et la multiplication sont toutes deux associatives et commutatives ;*
- ii) il existe un neutre 0 pour l'addition et tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$ possède un opposé $-\eta$;*
- iii) il existe un neutre 1 pour la multiplication ;*
- iv) la multiplication est bilinéaire, c'est-à-dire qu'elle est distributive sur l'addition.*

DÉMONSTRATION. On peut prouver la proposition pour tout $n \in \mathbb{N}$ par induction. Lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, on sait que la proposition est vraie puisque ce sont les cas réel et complexe. Ensuite, en supposant que le résultat est vrai pour $n - 1$, on peut démontrer qu'il l'est aussi pour n à partir des définitions de l'addition et de la multiplication multicomplexes.

- i) L'associativité et la commutativité des opérations se démontre par calcul direct.*

- ii) Le neutre pour l'addition est $0 = 0 + 0i_n$ et l'opposé de tout nombre $\eta_1 + \eta_2 i_n$ est $-\eta_1 - \eta_2 i_n$.
- iii) Le neutre pour la multiplication est $1 = 1 + 0i_n$.
- iv) Démontrons la distributivité à gauche. À partir de la définition de l'addition et de la multiplication, on calcule que

$$\begin{aligned}
\eta(\zeta + \omega) &= (\eta_1 + \eta_2 i_n) \left((\zeta_1 + \zeta_2 i_n) + (\omega_1 + \omega_2 i_n) \right), \\
&= (\eta_1 + \eta_2 i_n) \left((\zeta_1 + \omega_1) + (\zeta_2 + \omega_2) i_n \right), \\
&= \eta_1(\zeta_1 + \omega_1) - \eta_2(\zeta_2 + \omega_2) + \left(\eta_1(\zeta_2 + \omega_2) + \eta_2(\zeta_1 + \omega_1) \right) i_n.
\end{aligned}$$

En supposant que la multiplication est bilinéaire dans $\mathbb{M}(n-1)$, on trouve donc que

$$\begin{aligned}
\eta(\zeta + \omega) &= \eta_1 \zeta_1 + \eta_1 \omega_1 - \eta_2 \zeta_2 - \eta_2 \omega_2 + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_1 \omega_2 + \eta_2 \zeta_1 + \eta_2 \omega_1) i_n, \\
&= \eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2 + \eta_1 \omega_1 - \eta_2 \omega_2 + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1) i_n + (\eta_1 \omega_2 + \eta_2 \omega_1) i_n, \\
&= (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2) + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1) i_n + (\eta_1 \omega_1 - \eta_2 \omega_2) + (\eta_1 \omega_2 + \eta_2 \omega_1) i_n, \\
&= (\eta_1 + \eta_2 i_n)(\zeta_1 + \zeta_2 i_n) + (\eta_1 + \eta_2 i_n)(\omega_1 + \omega_2 i_n), \\
&= \eta \zeta + \eta \omega.
\end{aligned}$$

La distributivité à droite se démontre de manière semblable. ■

1.2 Représentation canonique et conjugaisons

À l'aide de la distributivité de la multiplication sur l'addition, on peut exprimer un nombre multicomplexe de plusieurs manières.

Proposition 1.2.1

Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. Tout nombre n -complexe peut être représenté à l'aide de 2^{n-k} nombres k -complexes. En particulier, tout nombre n -complexe possède une représentation en 2^n composantes réelles.

DÉMONSTRATION. Cet énoncé a déjà été démontré par induction par Garant-Pelletier [12]. En résumé, on sait que tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$ dépend de 2 composantes $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$.

De même, chacune de ces composantes η_1 et η_2 dépendent de 2 composantes de $\mathbb{M}(n-2)$. En poursuivant ce raisonnement récursivement, on trouve le résultat.

Notamment, on peut remarquer que 2^{n-k} correspond au nombre de combinaisons possibles de $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n\}$, la combinaison vide correspondant à l'unité 1. Lorsque $k = 0$, chacune des composantes réelles peut donc être associée à une combinaison d'unités imaginaires. ■

On voit, à la fin de la dernière démonstration, que l'ensemble des combinaisons d'unités imaginaires joue un rôle important dans la représentation des nombres multicomplexes. On introduit donc la notation suivante.

Définition 1.2.2

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. On définit alors les ensembles $\mathbb{I}_k(n)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{n-1}(n) &= \{1, i_n\}; \\ \mathbb{I}_{n-2}(n) &= \{1, i_{n-1}, i_n, i_{n-1}i_n\}; \\ &\vdots \\ \mathbb{I}_k(n) &= \mathbb{I}_{k+1}(n) \cup \{i_{k+1} \cdot \mathbf{i} \mid \mathbf{i} \in \mathbb{I}_{k+1}(n)\} \text{ pour } k \leq n-2.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $k = 0$, on écrit $\mathbb{I}(n) := \mathbb{I}_0(n)$.

Exemple 1.2.3. Considérons l'ensemble $\mathbb{I}_k(n)$, où $k < n$. Pour $n = 1$, on a $\mathbb{I}(1) = \{1, i_1\}$. Pour $n = 2$, on voit que

$$\mathbb{I}_1(2) = \{1, i_2\} \quad \text{et} \quad \mathbb{I}(2) = \{1, i_1, i_2, i_1i_2\}.$$

De même, pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2(3) &= \{1, i_3\}; \\ \mathbb{I}_1(3) &= \{1, i_2, i_3, i_2i_3\}; \\ \mathbb{I}(3) &= \{1, i_1, i_2, i_1i_2, i_3, i_1i_3, i_2i_3, i_1i_2i_3\}.\end{aligned}$$

▲

L'exemple suivant permet d'illustrer comment les éléments de $\mathbb{I}_k(n)$ peuvent être utilisés pour représenter de différentes manières un nombre multicomplexe.

Exemple 1.2.4. Considérons un nombre tricomplexe $\eta \in \mathbb{TC}$. Par définition des nombres multicomplexes, on sait qu'il existe deux nombres bicomplexes $w_1, w_2 \in \mathbb{BC}$, quatre nombres complexes $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ et huit nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_8 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \eta &= w_1 + w_2 i_3, \\ &= (z_1 + z_2 i_2) + (z_3 + z_4 i_2) i_3, \\ &= z_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3 + z_4 i_2 i_3, \\ &= (x_1 + x_2 i_1) + (x_3 + x_4 i_1) i_2 + (x_5 + x_6 i_1) i_3 + (x_7 + x_8 i_1) i_2 i_3, \\ &= x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + x_4 i_1 i_2 + x_5 i_3 + x_6 i_1 i_3 + x_7 i_2 i_3 + x_8 i_1 i_2 i_3. \end{aligned}$$

▲

À partir des exemples 1.2.3 et 1.2.4, on voit que l'ensemble $\mathbb{I}_k(n)$ peut être utilisé pour représenter un nombre n -complexe. En général, on voit ainsi que tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$ peut être écrit sous la forme

$$\eta = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i}$$

où $\eta_{\mathbf{i}} \in \mathbb{M}(k)$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)$. Dans le cas où $k = 0$, on trouve l'expression de η en fonction de ses 2^n coefficients réels. On déduit ainsi la définition suivante.

Définition 1.2.5 – Représentation canonique d'un nombre multicomplexe

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. La *représentation canonique en coefficients k -complexes* d'un nombre multicomplexe $\eta \in \mathbb{M}(n)$ est donnée par l'expression

$$\eta = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \tag{1.1}$$

où $\eta_{\mathbf{i}} \in \mathbb{M}(k)$. Dans le cas particulier où $k = 0$, on écrit $\mathbb{I}(n) := \mathbb{I}_0(n)$ pour obtenir la *représentation canonique en coefficients réels* de η :

$$\eta = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n)} x_{\mathbf{i}} \mathbf{i}.$$

Par ailleurs, la notion de conjugué peut aussi être étendue aux multicomplexes. La conjugaison de nombres multicomplexes présentée peut être retrouvée dans [34].

Définition 1.2.6 – Conjugaison multicomplexe

Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ où $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$. Les n conjugués n -complexes, notés \dagger_k , où $1 \leq k \leq n$, sont définis récursivement comme suit :

$$i) \quad \eta^{\dagger_n} = \eta_1 - \eta_2 i_n ;$$

$$ii) \quad \eta^{\dagger_k} = \eta_1^{\dagger_k} + \eta_2^{\dagger_k} i_n \quad \forall k < n.$$

De plus, si $k > n$, alors $\eta^{\dagger_k} := \eta$.

La définition précédente présente donc n conjugués sur $\mathbb{M}(n)$. Par ailleurs, en utilisant la composition de fonctions, il est possible d'obtenir d'autres conjugués. En effet, on pourrait vérifier que toutes les compositions des conjugués présentés précédemment sont aussi des conjugaisons sur $\mathbb{M}(n)$. En fait, Garant-Pelletier a même démontré que, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, l'ensemble des 2^n compositions de conjugués n -complexes muni de l'opération de composition forme un groupe commutatif [12]. Avant de démontrer cet énoncé dans le cas général, on présente ici quelques propriétés du conjugué multicomplexe.

Proposition 1.2.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$. Pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$:

$$i) \quad (\eta \pm \zeta)^{\dagger_k} = \eta^{\dagger_k} \pm \zeta^{\dagger_k} ;$$

$$ii) \quad (\eta \cdot \zeta)^{\dagger_k} = \eta^{\dagger_k} \cdot \zeta^{\dagger_k} ;$$

$$iii) \quad (\eta^{\dagger_k})^{\dagger_k} = \eta ;$$

$$iv) \quad (\eta^{\dagger_k})^{\dagger_l} = (\eta^{\dagger_l})^{\dagger_k}.$$

DÉMONSTRATION. Démontrons d'abord les trois premières propriétés. Si $k > n$, les propriétés sont évidentes. Dans le cas où $k \leq n$, démontrons ces propriétés par induction sur n . Lorsque $n = 1$, on a nécessairement que $k = 1$. Dans ce cas, on retrouve le conjugué complexe habituel et les propriétés proposées sont bien connues. Supposons maintenant que les trois propriétés sont vérifiées pour un certain $n \geq 1$ et démontrons qu'elles restent valides pour $n + 1$.

Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_{n+1}$ et $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i_{n+1}$ où $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(n)$.

i) Lorsque $k = n + 1$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} (\eta \pm \zeta)^{\dagger_{n+1}} &= \left((\eta_1 \pm \zeta_1) + (\eta_2 \pm \zeta_2)i_{n+1} \right)^{\dagger_{n+1}}, \\ &= (\eta_1 \pm \zeta_1) - (\eta_2 \pm \zeta_2)i_{n-1}, \\ &= (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1}) \pm (\zeta_1 - \zeta_2 i_{n-1}), \\ &= \eta^{\dagger_{n+1}} \pm \zeta^{\dagger_{n+1}}. \end{aligned}$$

Si $k \leq n$, en utilisant l'hypothèse d'induction, on calcule que

$$\begin{aligned} (\eta \pm \zeta)^{\dagger_k} &= (\eta_1 \pm \zeta_1)^{\dagger_k} + (\eta_2 \pm \zeta_2)^{\dagger_k} i_{n+1}, \\ &= (\eta_1^{\dagger_k} \pm \zeta_1^{\dagger_k}) + (\eta_2^{\dagger_k} \pm \zeta_2^{\dagger_k}) i_{n+1}, \\ &= (\eta_1^{\dagger_k} + \eta_2^{\dagger_k} i_{n+1}) \pm (\zeta_1^{\dagger_k} + \zeta_2^{\dagger_k} i_{n+1}), \\ &= \eta^{\dagger_k} \pm \zeta^{\dagger_k}. \end{aligned}$$

ii) Si $k = n + 1$, on voit que

$$\begin{aligned} (\eta \cdot \zeta)^{\dagger_{n+1}} &= \left((\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2) + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1)i_{n+1} \right)^{\dagger_{n+1}}, \\ &= (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2) - (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1)i_{n+1}, \\ &= (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1})(\zeta_1 - \zeta_2 i_{n-1}), \\ &= \eta^{\dagger_{n+1}} \cdot \zeta^{\dagger_{n+1}}. \end{aligned}$$

Lorsque $k \leq n$, en utilisant la propriété 1 et l'hypothèse d'induction, on obtient que

$$\begin{aligned} (\eta \cdot \zeta)^{\dagger_k} &= \left((\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2)^{\dagger_k} + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1)^{\dagger_k} i_{n+1} \right), \\ &= \left(((\eta_1 \zeta_1)^{\dagger_k} - (\eta_2 \zeta_2)^{\dagger_k}) + ((\eta_1 \zeta_2)^{\dagger_k} + (\eta_2 \zeta_1)^{\dagger_k}) i_{n+1} \right), \\ &= \left((\eta_1^{\dagger_k} \zeta_1^{\dagger_k} - \eta_2^{\dagger_k} \zeta_2^{\dagger_k}) + (\eta_1^{\dagger_k} \zeta_2^{\dagger_k} + \eta_2^{\dagger_k} \zeta_1^{\dagger_k}) i_{n+1} \right), \\ &= (\eta_1^{\dagger_k} + \eta_2^{\dagger_k} i_{n+1})(\zeta_1^{\dagger_k} + \zeta_2^{\dagger_k} i_{n+1}), \\ &= \eta^{\dagger_k} \cdot \zeta^{\dagger_k}. \end{aligned}$$

iii) Lorsque $k = n + 1$, on peut vérifier que

$$\left(\eta^{\dagger_{n+1}} \right)^{\dagger_{n+1}} = (\eta_1 - \eta_2 i_{n+1})^{\dagger_{n+1}} = \eta_1 + \eta_2 i_{n+1} = \eta.$$

Lorsque $k \leq n$, par l'hypothèse d'induction, on obtient que

$$\left(\eta^{\dagger_k} \right)^{\dagger_k} = \left(\eta_1^{\dagger_k} + \eta_2^{\dagger_k} i_{n+1} \right)^{\dagger_k} = \left(\eta_1^{\dagger_k} \right)^{\dagger_k} + \left(\eta_2^{\dagger_k} \right)^{\dagger_k} i_{n+1} = \eta_1 + \eta_2 i_{n+1} = \eta.$$

Ainsi, par le principe d'induction, les trois premières propriétés sont vérifiées pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons maintenant la propriété *iv*). Si $k = l$, $l > n$ ou $k > n$, le résultat est évident. Posons donc, sans perte de généralité, que $1 \leq k < l \leq n$.

Lorsque $l = n$, pour $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ on calcule que

$$\begin{aligned} (\eta^{\dagger k})^{\dagger n} &= (\eta_1^{\dagger k} + \eta_2^{\dagger k} i_n)^{\dagger n}, \\ &= \eta_1^{\dagger k} - \eta_2^{\dagger k} i_n, \\ &= (\eta_1 - \eta_2 i_1)^{\dagger k}, \\ &= (\eta^{\dagger n})^{\dagger k}. \end{aligned}$$

Si $l < n$, on procède par induction. Avec $k = 1$, $l = 2$ et $n = 3$, on voit que, pour $\eta = w_1 + w_2 i_3$ où $w_1 = z_1 + z_2 i_2$ et $w_2 = z_3 + z_4 i_2$,

$$\begin{aligned} (\eta^{\dagger 1})^{\dagger 2} &= (w_1^{\dagger 1})^{\dagger 2} + (w_2^{\dagger 1})^{\dagger 2} i_3, \\ &= (z_1^{\dagger 1} + z_2^{\dagger 1} i_2)^{\dagger 2} + (z_3^{\dagger 1} + z_4^{\dagger 1} i_2)^{\dagger 2} i_3, \\ &= (z_1^{\dagger 1} - z_2^{\dagger 1} i_2) + (z_3^{\dagger 1} - z_4^{\dagger 1} i_2) i_3, \\ &= (z_1 - z_2 i_2)^{\dagger 1} + (z_3 - z_4 i_2)^{\dagger 1} i_3, \\ &= (w_1^{\dagger 2})^{\dagger 1} + (w_2^{\dagger 2})^{\dagger 1} i_3, \\ &= (\eta^{\dagger 2})^{\dagger 1}. \end{aligned}$$

En supposant donc que la propriété *iv*) est vraie pour un entier n , on voit que, pour tout $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_{n+1}$,

$$(\eta^{\dagger k})^{\dagger l} = (\eta_1^{\dagger k})^{\dagger l} + (\eta_2^{\dagger k})^{\dagger l} i_{n+1} = (\eta_1^{\dagger l})^{\dagger k} + (\eta_2^{\dagger l})^{\dagger k} i_{n+1} = (\eta^{\dagger l})^{\dagger k}.$$

On conclut donc que la quatrième propriété est aussi valide pour tous les conjugués. ■

Par ailleurs, lorsque $k < n$, il est possible d'interpréter le conjugué \dagger_k plus intuitive-

ment. En effet, de l'équation 1.1 à la définition 1.2.5, on sait que, pour tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$,

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i}, \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} (\eta_{\mathbf{i},1} + \eta_{\mathbf{i},2} i_k) \mathbf{i}\end{aligned}$$

où $\eta_{\mathbf{i},1}, \eta_{\mathbf{i},2} \in \mathbb{M}(k-1)$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)$. On obtient donc que

$$\eta^{\dagger k} = \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} (\eta_{\mathbf{i},1} + \eta_{\mathbf{i},2} i_k) \mathbf{i} \right)^{\dagger k} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} (\eta_{\mathbf{i},1} + \eta_{\mathbf{i},2} i_k)^{\dagger k} \mathbf{i} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} (\eta_{\mathbf{i},1} - \eta_{\mathbf{i},2} i_k) \mathbf{i}.$$

Ainsi, le conjugué $\eta^{\dagger k}$ de $\eta \in \mathbb{M}(n)$ peut être obtenu en changeant le signe de tous les termes contenant l'unité i_k .

Exemple 1.2.8. Considérons le nombre tricomplexe

$$\eta = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_1 i_2 + x_5 i_1 i_3 + x_6 i_2 i_3 + x_7 i_1 i_2 i_3.$$

On peut obtenir les trois conjugués suivants :

$$\begin{aligned}\eta^{\dagger 1} &= x_0 - x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 - x_4 i_1 i_2 - x_5 i_1 i_3 + x_6 i_2 i_3 - x_7 i_1 i_2 i_3, \\ \eta^{\dagger 2} &= x_0 + x_1 i_1 - x_2 i_2 + x_3 i_3 - x_4 i_1 i_2 + x_5 i_1 i_3 - x_6 i_2 i_3 - x_7 i_1 i_2 i_3, \\ \eta^{\dagger 3} &= x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 - x_3 i_3 + x_4 i_1 i_2 - x_5 i_1 i_3 - x_6 i_2 i_3 - x_7 i_1 i_2 i_3.\end{aligned}$$

▲

Proposition 1.2.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'ensemble \ddagger de toutes les 2^n compositions de conjugués \ddagger_k où $1 \leq k \leq n$ (on inclut dans \ddagger l'identité \ddagger_0 telle que $\eta^{\ddagger_0} = \eta$). L'ensemble \ddagger muni de la composition forme un groupe commutatif.

DÉMONSTRATION. La fermeture de l'ensemble \ddagger sur la composition est évidente par définition de \ddagger et par les propriétés de la composition. De plus, on sait déjà que la composition de fonctions, dans ce cas-ci de conjugués, est associative. Le neutre est évidemment l'identité \ddagger_0 . On déduit ensuite que tout conjugué est son propre inverse et que la composition est commutative à partir des propriétés *iii)* et *iv)* de la proposition 1.2.7. ■

Dans le même ordre d'idée, Garant-Pelletier [12] a démontré que (\dagger, \circ) forme un groupe isomorphe au groupe commutatif $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$. On définit \mathbb{Z}_2^n comme l'ensemble contenant tous les vecteurs à n composantes dans $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ tandis que l'opération $+_2$ représente l'addition modulo 2. Dans le cas particulier où $n = 2$, $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$ est aussi connu sous le nom de *groupe de Klein*.

Essentiellement, pour démontrer l'isomorphisme entre (\dagger, \circ) et $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$, il suffit d'associer chaque conjugué \dagger_k à la k^e composante. Par exemple, dans le cas bicomplexe, la bijection

$$\begin{aligned}\dagger_0 &\mapsto (0, 0); \\ \dagger_1 &\mapsto (1, 0); \\ \dagger_2 &\mapsto (0, 1); \\ \dagger_1 \circ \dagger_2 &\mapsto (1, 1);\end{aligned}$$

forme un isomorphisme entre le groupe des conjugués (\dagger, \circ) et le groupe de Klein $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$.

1.3 Représentation idempotente

Comme suggéré à la proposition 1.2.1, il est possible d'exprimer tout nombre n -complexe en fonction de 2^n composantes réelles ou encore en fonction de 2^{n-k} composantes k -complexes. Malgré que la représentation en composantes réelles est plutôt intuitive, la représentation idempotente est primordiale afin d'établir les fondements des fonctions multicomplexes. Celle-ci est présentée dans plusieurs ouvrages (voir, par exemple, [12, 30, 35]).

Proposition 1.3.1

Soit $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \neq l$ et considérons les deux nombres n -complexes

$$\gamma_{k,l} = \frac{1 + i_k i_l}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_{k,l} = \frac{1 - i_k i_l}{2}.$$

Ces nombres possèdent les propriétés suivantes :

$$\gamma_{k,l}^2 = \gamma_{k,l}, \quad \bar{\gamma}_{k,l}^2 = \bar{\gamma}_{k,l}, \quad \gamma_{k,l} \bar{\gamma}_{k,l} = \bar{\gamma}_{k,l} \gamma_{k,l} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{k,l} + \bar{\gamma}_{k,l} = 1.$$

Lorsque $n \geq 2$, tout nombre $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n \in \mathbb{M}(n)$, où $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$, peut être écrit sous la forme

$$\eta = (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1}) \gamma_{n-1,n} + (\eta_1 + \eta_2 i_{n-1}) \bar{\gamma}_{n-1,n}.$$

DÉMONSTRATION. Les quatre propriétés mentionnées se démontrent directement par calcul. Pour exprimer η en fonction de $\gamma_{n-1,n}$ et $\bar{\gamma}_{n-1,n}$, on procède ainsi :

$$\begin{aligned} \eta = \eta_1 + \eta_2 i_n &= \frac{1}{2} \left((\eta_1 - \eta_2 i_{n-1} + \eta_1 i_{n-1} i_n + \eta_2 i_n + \eta_1 + \eta_2 i_{n-1} - \eta_1 i_{n-1} i_n + \eta_2 i_n) \right), \\ &= \frac{1}{2} \left((\eta_1 - \eta_2 i_{n-1})(1 + i_{n-1} i_n) + (\eta_1 + \eta_2 i_{n-1})(1 - i_{n-1} i_n) \right), \\ &= (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1}) \frac{1 + i_{n-1} i_n}{2} + (\eta_1 + \eta_2 i_{n-1}) \frac{1 - i_{n-1} i_n}{2}, \\ &= (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1}) \gamma_{n-1,n} + (\eta_1 + \eta_2 i_{n-1}) \bar{\gamma}_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Remarque. Les nombres $\gamma_{n-1,n}$ et $\bar{\gamma}_{n-1,n}$ seront fréquemment utilisés. Afin d'alléger la notation, on écrira donc $\gamma_n := \gamma_{n-1,n}$ et $\bar{\gamma}_n := \bar{\gamma}_{n-1,n}$, c'est-à-dire avec un seul indice.

Remarque. Il existe une riche théorie basée sur les éléments idempotents, c'est-à-dire les éléments tels que $\gamma^2 = \gamma$. Ils permettent, par exemple, de décomposer une algèbre en une somme directe de sous-algèbres indécomposables ou encore de classer les anneaux selon diverses propriétés. Pour en apprendre davantage sur le sujet, le lecteur intéressé peut se référer au livre de Hazewinkel, Gubareni et Kirichenko [16] ou encore celui de Lam [19].

Les deux premières égalités de la proposition précédente indiquent que les nombres $\gamma_{k,l}$ et $\bar{\gamma}_{k,l}$ sont idempotents, d'où le nom de la représentation éponyme définie ci-dessous.

Définition 1.3.2 – Représentation idempotente standard

Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n \in \mathbb{M}(n)$ où $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$ et $n \geq 2$. La *représentation idempotente*, ou la *forme idempotente*, de η correspond à l'expression

$$\eta = (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1}) \gamma_n + (\eta_1 + \eta_2 i_{n-1}) \bar{\gamma}_n.$$

La représentation idempotente d'un nombre peut être développée davantage. En effet, tout nombre multicomplexe, qu'il soit n -complexe, $(n-1)$ -complexe, $(n-2)$ -complexe, etc., a aussi une représentation idempotente. Ainsi, on peut écrire que, pour tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$,

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_{\gamma_n} \gamma_n + \eta_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n, \\ &= (\eta_{\gamma_{n-1} \gamma_n} \gamma_{n-1} + \eta_{\bar{\gamma}_{n-1} \gamma_n} \bar{\gamma}_{n-1}) \gamma_n + (\eta_{\gamma_{n-1} \bar{\gamma}_n} \gamma_{n-1} + \eta_{\bar{\gamma}_{n-1} \bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_{n-1}) \bar{\gamma}_n, \\ &= \eta_{\gamma_{n-1} \gamma_n} \gamma_{n-1} \gamma_n + \eta_{\bar{\gamma}_{n-1} \gamma_n} \bar{\gamma}_{n-1} \gamma_n + \eta_{\gamma_{n-1} \bar{\gamma}_n} \gamma_{n-1} \bar{\gamma}_n + \eta_{\bar{\gamma}_{n-1} \bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_{n-1} \bar{\gamma}_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une notation générale, on introduit les ensembles $S_k(n)$.

Définition 1.3.3 – Représentation idempotente généralisée

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$. On définit alors que les ensembles $S_k(n)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_n(n) &= \{\gamma_n, \bar{\gamma}_n\}; \\ S_{n-1}(n) &= \{\gamma_{n-1} \gamma_n, \gamma_{n-1} \bar{\gamma}_n, \bar{\gamma}_{n-1} \gamma_n, \bar{\gamma}_{n-1} \bar{\gamma}_n\}; \\ &\vdots \\ S_k(n) &= \{\gamma_k \cdot \gamma \mid \gamma \in S_{k+1}(n)\} \cup \{\bar{\gamma}_k \cdot \gamma \mid \gamma \in S_{k+1}(n)\} \text{ pour } 2 \leq k < n. \end{aligned}$$

La *représentation idempotente en coefficients $(k-1)$ -complexes* d'un nombre multicomplexe $\eta \in \mathbb{M}(n)$ est

$$\eta = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma$$

où $\eta_\gamma \in \mathbb{M}(k-1)$ pour tout $\gamma \in S_k(n)$. En particulier, la représentation idempotente en coefficients $(n-1)$ -complexes est la représentation idempotente standard introduite à la définition 1.3.2.

Remarque. De manière équivalente, on aurait pu définir les ensembles $S_k(n)$ comme suit :

$$\begin{aligned} S_k(k) &= \{\gamma_k, \bar{\gamma}_k\}; \\ S_k(k+1) &= \{\gamma_k \gamma_{k+1}, \gamma_k \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_k \gamma_{k+1}, \bar{\gamma}_k \bar{\gamma}_{k+1}\}; \\ &\vdots \\ S_k(n) &= \left\{ \gamma \cdot \gamma_n \mid \gamma \in S_k(n-1) \right\} \cup \left\{ \gamma \cdot \bar{\gamma}_n \mid \gamma \in S_k(n-1) \right\} \text{ pour } 2 \leq k < n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Exemple 1.3.4. Considérons un nombre tricomplexe $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_3 \in \mathbb{TC}$. Sa forme idempotente standard est

$$\eta = (\eta_1 - \eta_2 i_2) \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 i_2) \bar{\gamma}_3.$$

En posant $\eta_1 = z_1 + z_2 i_2$ et $\eta_2 = z_3 + z_4 i_2$, où $z_j \in \mathbb{C}$, on peut trouver sa forme idempotente en coefficients complexes :

$$\begin{aligned} \eta &= (z_1 + z_2 i_2 - (z_3 + z_4 i_2) i_2) \gamma_3 + (z_1 + z_2 i_2 + (z_3 + z_4 i_2) i_2) \bar{\gamma}_3, \\ &= ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) i_2) \gamma_3 + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) i_2) \bar{\gamma}_3, \\ &= \left(((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3) i_1) \gamma_2 + ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) i_1) \bar{\gamma}_2 \right) \gamma_3 \\ &\quad + \left(((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3) i_1) \gamma_2 + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) i_1) \bar{\gamma}_2 \right) \bar{\gamma}_3, \\ &= ((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3) i_1) \gamma_2 \gamma_3 + ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) i_1) \bar{\gamma}_2 \gamma_3 \\ &\quad + ((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3) i_1) \gamma_2 \bar{\gamma}_3 + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) i_1) \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

La multiplication de deux nombres sous leur forme idempotente est calculée terme à terme, peu importe l'ordre des coefficients. Pour démontrer cette affirmation, on doit d'abord remarquer quelques propriétés sur les ensembles $S_k(n)$.

Lemme 1.3.5. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$ et considérons l'ensemble $S_k(n)$ tel que défini à la définition 1.3.3. Pour tout $\mu, \nu \in S_k(n)$, on a que

$$\mu^2 = \mu \quad \text{et} \quad \mu\nu = 0,$$

c'est-à-dire que tous les éléments sont idempotents et orthogonaux entre eux.

DÉMONSTRATION. On sait que tous les éléments de $S_k(n)$ sont des produits d'éléments γ_j ou $\bar{\gamma}_j$, prenant donc la forme $\gamma_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_n$. Soit $\mu \in S_k(n)$ ayant cette forme. Pour tout

facteur γ_j de μ , on sait que $\gamma_j^2 = \gamma_j$ selon la proposition 1.3.1. Comme la multiplication est commutative, on trouve que

$$\mu^2 = (\gamma_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_n)(\gamma_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_n) = \gamma_k^2 \gamma_{k+1}^2 \dots \gamma_n^2 = \gamma_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_n = \mu.$$

Considérons maintenant deux éléments $\mu, \nu \in S_k(n)$ différents. On sait qu'il existe au moins un indice j tel que le facteur γ_j est conjugué dans un nombre, mais pas dans l'autre (posons $\mu = \gamma_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_j \dots \gamma_n$ et $\nu = \gamma_k \gamma_{k+1} \dots \bar{\gamma}_j \dots \gamma_n$ sans perte de généralité). Comme $\gamma_j \bar{\gamma}_j = 0$ par la proposition 1.3.1, on obtient donc $\mu\nu = 0$. ■

Proposition 1.3.6

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$ et considérons deux nombres $\eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$ tels que

$$\eta = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma \quad \text{et} \quad \zeta = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \zeta_\gamma \gamma.$$

La multiplication de η et ζ sous leur représentation idempotente en coefficients d'ordre $k-1$ est obtenue en multipliant terme à terme, c'est-à-dire

$$\eta \cdot \zeta = \left(\sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma \right) \left(\sum_{\gamma \in S_k(n)} \zeta_\gamma \gamma \right) = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \zeta_\gamma \gamma.$$

En particulier, si $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_{n-1}$ et $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i_{n-1}$, alors

$$\eta \cdot \zeta = ((\eta_1 - \eta_2 i_{n-1})(\zeta_1 - \zeta_2 i_{n-1})) \gamma_n + ((\eta_1 + \eta_2 i_{n-1})(\zeta_1 + \zeta_2 i_{n-1})) \bar{\gamma}_n.$$

DÉMONSTRATION. En effectuant le calcul à l'aide de la distributivité, on trouve le ré-

sultat directement du lemme 1.3.5 :

$$\begin{aligned}
 \eta \cdot \zeta &= \left(\sum_{\mu \in S_k(n)} \eta_\mu \mu \right) \left(\sum_{\nu \in S_k(n)} \zeta_\nu \nu \right), \\
 &= \sum_{\mu \in S_k(n)} \sum_{\nu \in S_k(n)} \eta_\mu \zeta_\nu \mu \nu, \\
 &= \sum_{\mu \in S_k(n)} \eta_\mu \zeta_\mu \mu^2 + \sum_{\mu \neq \nu} \eta_\mu \zeta_\nu \mu \nu, \\
 &= \sum_{\mu \in S_k(n)} \eta_\mu \zeta_\mu \mu + 0, \\
 &= \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \zeta_\gamma \gamma.
 \end{aligned}$$

■

La multiplication terme à terme permettra de déduire plusieurs résultats sur les nombres multicomplexes. En effet, certaines propriétés des nombres n -complexes dépendent souvent directement des propriétés de leurs composantes idempotentes $(n-1)$ -complexes. Les notations suivantes s'avéreront donc utiles à maintes reprises.

Définition 1.3.7 – Produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Le *produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien* déterminé par $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ est l'ensemble

$$X_1 \times_{\gamma_n} X_2 = \{ \eta \in \mathbb{M}(n) \mid \eta = \eta_1 \gamma_n + \eta_2 \bar{\gamma}_n, (\eta_1, \eta_2) \in X_1 \times X_2 \}$$

où \times dénote le produit cartésien habituel.

Définition 1.3.8 – Différence d'ensembles $\mathbb{M}(n)$ -cartésiens

Soit $A = A_1 \times_{\gamma_n} A_2$ et $B = B_1 \times_{\gamma_n} B_2$. Alors

$$A \setminus_{\gamma_n} B = (A_1 \setminus B_1) \times_{\gamma_n} (A_2 \setminus B_2).$$

où \setminus dénote la différence d'ensemble habituelle.

À partir du produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien, on peut définir des types particuliers de disques multicomplexes. Ceux-ci permettront plus loin de généraliser certaines notions connues des fractales complexes.

Définition 1.3.9 – Boule multicomplexe

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $B_n(\zeta, r)$ et $\overline{B}_n(\zeta, r)$ les boules respectivement ouverte et fermée centrées en $\zeta \in \mathbb{M}(n)$ de rayon $r > 0$, c'est-à-dire

$$B_n(\zeta, r) = \{\eta \in \mathbb{M}(n) : \|\eta - \zeta\|_n < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B}_n(\zeta, r) = \{\eta \in \mathbb{M}(n) : \|\eta - \zeta\|_n \leq r\}.$$

La norme $\|\cdot\|_n$ utilisée à la définition précédente correspond à la norme euclidienne usuelle dans \mathbb{R}^{2^n} . Elle sera étudiée plus en détail à la section 1.5.

Définition 1.3.10 – $\mathbb{M}(n)$ -disque

Soit $n \in \mathbb{N}$ où $n \geq 2$. Le $\mathbb{M}(n)$ -disque ouvert de rayons r_1 et r_2 centré en ζ , où $\zeta = \zeta_{\gamma_n} \gamma_n + \zeta_{\overline{\gamma}_n} \overline{\gamma}_n$, est l'ensemble

$$D_n(\zeta, r_1, r_2) = B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1) \times_{\gamma_n} B_{n-1}(\zeta_{\overline{\gamma}_n}, r_2).$$

De même, le $\mathbb{M}(n)$ -disque fermé de rayons r_1 et r_2 centré en ζ est

$$\overline{D}_n(\zeta, r_1, r_2) = \overline{B}_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1) \times_{\gamma_n} \overline{B}_{n-1}(\zeta_{\overline{\gamma}_n}, r_2).$$

De plus, si $r_1 = r_2 = r$, on note plutôt $D_n(\zeta, r)$ ou $\overline{D}_n(\zeta, r)$ selon le cas.

1.4 Inversibilité d'un nombre multicomplexe

Comme mentionné à la section 1.1, tout nombre multicomplexe n'a pas forcément un inverse. On présente ici quelques résultats permettant de déterminer si un nombre est inversible ou non.

Proposition 1.4.1

Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n \in \mathbb{M}(n)$ où $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$ et $n \geq 2$. Le nombre η est inversible ssi $\eta_1 - \eta_2 i_{n-1}$ et $\eta_1 + \eta_2 i_{n-1}$ sont inversibles. De plus, si η est inversible, alors

$$\eta^{-1} = (\eta_1 - \eta_2 i_{n-1})^{-1} \gamma_n + (\eta_1 + \eta_2 i_{n-1})^{-1} \overline{\gamma}_n.$$

DÉMONSTRATION. Cette proposition découle directement de la multiplication terme à

terme sous la forme idempotente. Posons $u_1 = \eta_1 - \eta_2 i_{n-1}$ et $u_2 = \eta_1 + \eta_2 i_{n-1}$. Aussi, on sait de la proposition 1.3.1 que $1 = \gamma_n + \bar{\gamma}_n$. S'il existe un nombre $\zeta = v_1 \gamma_n + v_2 \bar{\gamma}_n$ tel que $\eta \cdot \zeta = 1$, alors

$$\eta \cdot \zeta = u_1 v_1 \gamma_n + u_2 v_2 \bar{\gamma}_n = \gamma_n + \bar{\gamma}_n \quad \Leftrightarrow \quad u_1 v_1 = 1 \text{ et } u_2 v_2 = 1,$$

c'est-à-dire que v_1 et v_2 sont les inverses de u_1 et u_2 respectivement. Ainsi, η possède un inverse ssi ses composantes idempotentes possèdent aussi des inverses. On remarque aussi que l'inverse de η , lorsqu'il existe, est $\eta^{-1} = u_1^{-1} \gamma_n + u_2^{-1} \bar{\gamma}_n$. ■

Corollaire 1.4.2

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$ et considérons un nombre $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que

$$\eta = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma.$$

Le nombre η est inversible ssi η_γ est inversible $\forall \gamma \in S_k(n)$. De plus, si η est inversible,

$$\eta^{-1} = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma^{-1} \gamma.$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que η est inversible ssi ses composantes idempotentes $(k-1)$ -complexes le sont aussi, on procède par induction. Pour $n = 2$, le résultat est vérifié par la proposition 1.4.1. Ensuite, supposons que le résultat est vrai pour $n-1$ et démontrons-le pour n .

Lorsque $k = n$, on sait déjà que $\eta \in \mathbb{M}(n)$ est inversible ssi ses composantes idempotentes $\eta_{\gamma_n} \in \mathbb{M}(n-1)$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in \mathbb{M}(n-1)$ le sont aussi par la proposition 1.4.1. Dans le cas où $k < n$, on sait par hypothèse d'induction que η_{γ_n} et $\eta_{\bar{\gamma}_n}$ sont inversibles ssi leurs composantes idempotentes d'ordre $k-1$ le sont aussi. Ainsi, en notant $\mathbb{M}(n)^{-1}$ l'ensemble des nombres n -complexes inversibles,

$$\begin{aligned} \eta \in \mathbb{M}(n)^{-1} &\Leftrightarrow \eta_{\gamma_n} \in \mathbb{M}(n-1)^{-1} \text{ et } \eta_{\bar{\gamma}_n} \in \mathbb{M}(n-1)^{-1} && \text{par la proposition 1.4.1,} \\ &\Leftrightarrow \eta_\gamma \in \mathbb{M}(k-1)^{-1} \forall \gamma \in S_k(n) && \text{par l'hypothèse d'induction,} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

De plus, dans le cas où η est inversible, posons $\zeta = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma^{-1} \gamma$ et vérifions que $\eta\zeta = \zeta\eta = 1$. D'abord, on remarque que $1 = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \gamma$. Effectivement, pour tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$, on peut calculer à l'aide de la multiplication terme à terme démontrée à la proposition 1.3.6 que

$$\eta \sum_{\gamma \in S_k(n)} \gamma = \left(\sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma \right) \left(\sum_{\gamma \in S_k(n)} \gamma \right) = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma = \eta,$$

c'est-à-dire que $\sum_{\gamma \in S_k(n)} \gamma$ est le neutre sur la multiplication. En utilisant encore une fois la multiplication terme à terme, on voit que

$$\begin{aligned} \eta\zeta &= \left(\sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma \right) \left(\sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma^{-1} \gamma \right), \\ &= \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \eta_\gamma^{-1} \gamma, \\ &= \sum_{\gamma \in S_k(n)} \gamma = 1, \end{aligned}$$

d'où $\eta^{-1} = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma^{-1} \gamma$. ■

Corollaire 1.4.3

Soit $\eta \in \mathbb{M}(n)$ où $n \geq 2$. Le nombre η est inversible si et seulement si ses composantes idempotentes complexes $\eta_\gamma \in \mathbb{C}$, où $\gamma \in S_2(n)$, sont non nulles $\forall \gamma \in S_2(n)$.

DÉMONSTRATION. Comme le seul nombre complexe non inversible est 0, le résultat est trouvé directement du corollaire 1.4.2. ■

Bref, l'inversibilité d'un nombre multicomplexe dépend donc directement de ses composantes idempotentes. Cette observation permet de caractériser tous les nombres non inversibles, par exemple, lorsqu'on considère l'espace \mathbb{BC} .

Proposition 1.4.4

Un nombre $\eta \in \mathbb{BC}$ est non inversible si et seulement si il existe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$\eta = z\gamma_2 \quad \text{ou} \quad \eta = z\overline{\gamma}_2.$$

DÉMONSTRATION. Posons $\eta = z_1\gamma_2 + z_2\bar{\gamma}_2$ où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Du corollaire 1.4.3, on sait que

$$\eta \text{ est non inversible} \Leftrightarrow z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow \eta = z_2\bar{\gamma}_2 \text{ ou } \eta = z_1\gamma_2. \quad \blacksquare$$

1.5 Norme multicomplexe

On peut définir récursivement la norme d'un nombre multicomplexe comme suit.

Proposition 1.5.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ où $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1)$. L'application

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2},$$

où $\|\cdot\|_0$ correspond à la valeur absolue $|\cdot|$ définie sur \mathbb{R} , est une norme, c'est-à-dire que

- i) $\|\eta\|_n \geq 0$;
- ii) $\|\eta\|_n = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$;
- iii) $\|\lambda\eta\|_n = |\lambda|\|\eta\|_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- iv) $\|\eta + \zeta\|_n \leq \|\eta\|_n + \|\zeta\|_n \quad \forall \eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$.

DÉMONSTRATION. On procède par induction. Lorsque $n = 1$, on voit que $\|\cdot\|_1$ est la norme complexe usuelle, donc le résultat est évident. En supposant ensuite que $\|\cdot\|_{n-1}$ est bel et bien une norme, on peut vérifier les quatre propriétés :

$$i) \quad \|\eta\|_n = \sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2} \geq 0.$$

$$ii) \quad \|\eta\|_n = 0 \Leftrightarrow \eta = 0 \text{ car}$$

$$\begin{aligned} \|\eta\|_n = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2} = 0, \\ &\Leftrightarrow \|\eta_1\|_{n-1}^2 = 0 \text{ et } \|\eta_2\|_{n-1}^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \eta_1 = 0 \text{ et } \eta_2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \eta = 0. \end{aligned}$$

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \|\lambda\eta\|_n &= \|\lambda\eta_1 + \lambda\eta_2 i_n\|_n, \\
 &= \sqrt{\|\lambda\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\lambda\eta_2\|_{n-1}^2}, \\
 &= \sqrt{|\lambda|^2 \|\eta_1\|_{n-1}^2 + |\lambda|^2 \|\eta_2\|_{n-1}^2}, \\
 &= |\lambda| \sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2}, \\
 &= |\lambda| \|\eta\|_n.
 \end{aligned}$$

iv) Pour vérifier que $\|\eta + \zeta\|_n \leq \|\eta\|_n + \|\zeta\|_n$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui stipule que, pour tout nombres réels $a_j, b_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^k a_j b_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k a_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^k b_j^2}.$$

Pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$ où $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ et $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i_n$, on trouve à partir de l'hypothèse d'induction que

$$\begin{aligned}
 \|\eta + \zeta\|_n^2 &= \|(\eta_1 + \zeta_1) + (\eta_2 + \zeta_2) i_n\|_n^2, \\
 &= \|\eta_1 + \zeta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2 + \zeta_2\|_{n-1}^2, \\
 &\leq (\|\eta_1\|_{n-1} + \|\zeta_1\|_{n-1})^2 + (\|\eta_2\|_{n-1} + \|\zeta_2\|_{n-1})^2, \\
 &= \|\eta_1\|_{n-1}^2 + 2\|\eta_1\|_{n-1}\|\zeta_1\|_{n-1} + \|\zeta_1\|_{n-1}^2 \\
 &\quad + \|\eta_2\|_{n-1}^2 + 2\|\eta_2\|_{n-1}\|\zeta_2\|_{n-1} + \|\zeta_2\|_{n-1}^2, \\
 &= \|\eta\|_n^2 + 2(\|\eta_1\|_{n-1}\|\zeta_1\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1}\|\zeta_2\|_{n-1}) + \|\zeta\|_n^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $k = 2$, $a_j = \|\eta_j\|_{n-1}$ et $b_j = \|\zeta_j\|_{n-1}$, on voit que

$$\begin{aligned}
 \|\eta + \zeta\|_n^2 &\leq \|\eta\|_n^2 + 2\sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2} \sqrt{\|\zeta_1\|_{n-1}^2 + \|\zeta_2\|_{n-1}^2} + \|\zeta\|_n^2, \\
 &= \|\eta\|_n^2 + 2\|\eta\|_n \|\zeta\|_n + \|\zeta\|_n^2, \\
 &= (\|\eta\|_n + \|\zeta\|_n)^2,
 \end{aligned}$$

d'où $\|\eta + \zeta\|_n \leq \|\eta\|_n + \|\zeta\|_n$. ■

Il est aussi possible de calculer la norme d'un nombre multicomplexe à partir de sa forme canonique. Il suffit essentiellement d'utiliser la norme euclidienne usuelle.

Proposition 1.5.2

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$ et considérons $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\eta = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i}$ où $\eta_{\mathbf{i}} \in \mathbb{M}(k)$. Alors,

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \|\eta_{\mathbf{i}}\|_k^2}.$$

DÉMONSTRATION. La proposition se démontre par induction sur n . Si $n = k + 1$, on voit que $\mathbb{I}_k(n) = \mathbb{I}_{n-1}(n) = \{1, i_n\}$. Ainsi, on peut écrire $\eta = \eta_1 + \eta_{i_n} i_n$ et, par définition de $\|\cdot\|_n$,

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_{i_n}\|_{n-1}^2} = \sqrt{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_{n-1}(n)} \|\eta_{\mathbf{i}}\|_{n-1}^2}.$$

Ensuite, en supposant que la proposition est vraie pour une certaine valeur $n - 1$, démontrons qu'elle l'est aussi pour n . Si $k = n - 1$, le raisonnement ci-haut demeure valide. Si $k < n - 1$, alors on réécrit η sous la forme

$$\eta = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i} = \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n-1)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \right) + \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n-1)} \eta_{i_n \mathbf{i}} \mathbf{i} \right) i_n.$$

Par définition de la norme et en utilisant l'hypothèse d'induction, on arrive à calculer que

$$\begin{aligned} \|\eta\|_n &= \sqrt{\left\| \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n-1)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \right\|_{n-1}^2 + \left\| \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n-1)} \eta_{i_n \mathbf{i}} \mathbf{i} \right\|_{n-1}^2}, \\ &= \sqrt{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n-1)} \|\eta_{\mathbf{i}}\|_k^2 + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n-1)} \|\eta_{i_n \mathbf{i}}\|_k^2}, \\ &= \sqrt{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \|\eta_{\mathbf{i}}\|_k^2}. \end{aligned}$$

On conclut donc que la proposition est vraie pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. ■

Exemple 1.5.3. Considérons un nombre tricomplexe $\eta = w_1 + w_2 i_3$ où $w_1, w_2 \in \mathbb{BC}$. Posons également $w_1 = z_1 + z_2 i_2$ et $w_2 = z_3 + z_4 i_2$ où $z_j \in \mathbb{C}$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. De

plus, si $z_j = x_{2j-1} + x_{2j}i_1$ où $x_j \in \mathbb{R}$, alors on peut exprimer η de plusieurs manières :

$$\begin{aligned}\eta &= w_1 + w_2 i_3, \\ &= z_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3 + z_4 i_2 i_3, \\ &= x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + x_4 i_1 i_2 + x_5 i_3 + x_6 i_1 i_3 + x_7 i_2 i_3 + x_8 i_1 i_2 i_3.\end{aligned}$$

Ainsi, la proposition 1.5.2 permet de calculer la norme de η à partir de ces trois dernières représentations :

$$\begin{aligned}\|\eta\|_3 &= \sqrt{\|w_1\|_2^2 + \|w_2\|_2^2}, \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2}, \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^8 x_j^2}.\end{aligned}$$

▲

On peut aussi calculer la norme d'un nombre en utilisant sa représentation idempotente.

Proposition 1.5.4

Soit un entier $n \geq 2$ et considérons $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\eta = \eta_{\gamma_n} \gamma_n + \eta_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$ où $\eta_{\gamma_n}, \eta_{\bar{\gamma}_n} \in \mathbb{M}(n-1)$. Alors,

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\frac{\|\eta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}}.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat est démontré par Price [30]. Posons $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ où

$$\eta_1 = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} x_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} y_{\mathbf{i}} \mathbf{i}.$$

Par la proposition 1.5.2, on voit donc que

$$\|\eta\|_n^2 = \|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2 = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} (x_{\mathbf{i}}^2 + y_{\mathbf{i}}^2).$$

De plus, on sait que les coefficients η_{γ_n} et $\eta_{\bar{\gamma}_n}$ peuvent être écrits

$$\eta_{\gamma_n} = \eta_1 - \eta_2 i_{n-1} \quad \text{et} \quad \eta_{\bar{\gamma}_n} = \eta_1 + \eta_2 i_{n-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\eta_{\gamma_n} &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} x_{\mathbf{i}} \mathbf{i} - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} y_{\mathbf{i}} \mathbf{i} i_{n-1}, \\
&= \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} x_{\mathbf{i}} \mathbf{i} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} x_{\mathbf{i} i_{n-1}} \mathbf{i} i_{n-1} \right) - \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} y_{\mathbf{i}} \mathbf{i} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} y_{\mathbf{i} i_{n-1}} \mathbf{i} i_{n-1} \right) i_{n-1}, \\
&= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} x_{\mathbf{i}} \mathbf{i} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} x_{\mathbf{i} i_{n-1}} \mathbf{i} i_{n-1} - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} y_{\mathbf{i}} \mathbf{i} i_{n-1} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} y_{\mathbf{i} i_{n-1}} \mathbf{i}, \\
&= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left((x_{\mathbf{i}} + y_{\mathbf{i} i_{n-1}}) \mathbf{i} + (x_{\mathbf{i} i_{n-1}} - y_{\mathbf{i}}) \mathbf{i} i_{n-1} \right).
\end{aligned}$$

De même, on calcule que

$$\eta_{\gamma_n} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} x_{\mathbf{i}} \mathbf{i} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} y_{\mathbf{i}} \mathbf{i} i_{n-1} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left((x_{\mathbf{i}} - y_{\mathbf{i} i_{n-1}}) \mathbf{i} + (x_{\mathbf{i} i_{n-1}} + y_{\mathbf{i}}) \mathbf{i} i_{n-1} \right).$$

Par conséquent, en utilisant la proposition 1.5.2, on obtient que

$$\begin{aligned}
\|\eta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2 &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left((x_{\mathbf{i}} + y_{\mathbf{i} i_{n-1}})^2 + (x_{\mathbf{i} i_{n-1}} - y_{\mathbf{i}})^2 \right) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left((x_{\mathbf{i}} - y_{\mathbf{i} i_{n-1}})^2 + (x_{\mathbf{i} i_{n-1}} + y_{\mathbf{i}})^2 \right), \\
&= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left(x_{\mathbf{i}}^2 + 2x_{\mathbf{i}} y_{\mathbf{i} i_{n-1}} + y_{\mathbf{i} i_{n-1}}^2 + x_{\mathbf{i} i_{n-1}}^2 - 2x_{\mathbf{i} i_{n-1}} y_{\mathbf{i}} + y_{\mathbf{i}}^2 \right) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left(x_{\mathbf{i}}^2 - 2x_{\mathbf{i}} y_{\mathbf{i} i_{n-1}} + y_{\mathbf{i} i_{n-1}}^2 + x_{\mathbf{i} i_{n-1}}^2 + 2x_{\mathbf{i} i_{n-1}} y_{\mathbf{i}} + y_{\mathbf{i}}^2 \right), \\
&= 2 \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-2)} \left(x_{\mathbf{i}}^2 + x_{\mathbf{i} i_{n-1}}^2 + y_{\mathbf{i}}^2 + y_{\mathbf{i} i_{n-1}}^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n-1)} \left(x_{\mathbf{i}}^2 + y_{\mathbf{i}}^2 \right) \\
&= 2\|\eta\|_n^2,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 1.5.5

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$ et considérons $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\eta = \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_{\gamma} \gamma$ où $\eta_{\gamma} \in \mathbb{M}(k-1)$. Alors,

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_k(n)} \|\eta_{\gamma}\|_{k-1}^2}{2^{n-k+1}}}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve se fait par induction sur n . Lorsque $n = 2$, on a que $k = n = 2$ et le résultat est vérifié par la proposition 1.5.4. Ensuite, supposons que la proposition est vérifiée pour $n - 1$.

- Si $k = n$, le résultat est démontré par la proposition 1.5.4.
- Considérons le cas où $2 \leq k \leq n - 1$. Tout nombre $\eta \in \mathbb{M}(n)$ peut être exprimé sous la forme

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{\gamma \in S_k(n)} \eta_\gamma \gamma = \sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \left(\eta_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \cdot \gamma_n + \eta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma \cdot \bar{\gamma}_n \right), \\ &= \left(\sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \eta_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \right) \gamma_n + \left(\sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \eta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma \right) \bar{\gamma}_n. \end{aligned}$$

On peut se convaincre de cette affirmation en utilisant l'équation 1.2 qui suit la définition 1.3.3. Autrement dit, les composantes $\eta_{\gamma_n}, \eta_{\bar{\gamma}_n} \in \mathbb{M}(n-1)$ s'écrivent

$$\eta_{\gamma_n} = \sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \eta_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \quad \text{et} \quad \eta_{\bar{\gamma}_n} = \sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \eta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma.$$

On constate donc par l'hypothèse d'induction que

$$\|\eta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 = \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \|\eta_{\gamma \cdot \gamma_n}\|_{k-1}^2 \quad \text{et} \quad \|\eta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2 = \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \|\eta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}\|_{k-1}^2.$$

Ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned} \|\eta\|_n^2 &= \frac{1}{2} \left(\|\eta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2 \right) && \text{par la proposition 1.5.4,} \\ &= \frac{1}{2^{n-k+1}} \left(\sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \|\eta_{\gamma \cdot \gamma_n}\|_{k-1}^2 + \sum_{\gamma \in S_k(n-1)} \|\eta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}\|_{k-1}^2 \right) && \text{par hypothèse d'induction,} \\ &= \frac{1}{2^{n-k+1}} \sum_{\gamma \in S_k(n)} \|\eta_\gamma\|_{k-1}^2 && \text{par l'équation 1.2,} \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu dans le cas où $2 \leq k \leq n - 1$.

On conclut donc que la proposition est vraie pour tout entier $n \geq 2$. ■

Corollaire 1.5.6

Soit un entier $n \geq 2$ et considérons $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\eta = \sum_{\gamma \in S_2(n)} z_\gamma \gamma$ où $z_\gamma \in \mathbb{C}$.

Alors,

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} |z_\gamma|^2}{2^{n-1}}}.$$

DÉMONSTRATION. Le résultat s'obtient directement du corollaire 1.5.5 dans le cas où $k = 2$. ■

Exemple 1.5.7. Considérons un nombre tricomplexe $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_3 \in \mathbb{T}\mathbb{C}$. Posons également $\eta_1 = z_1 + z_2 i_2$ et $\eta_2 = z_3 + z_4 i_2$ où $z_j \in \mathbb{C}$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. On a déjà calculé à l'exemple 1.3.4 que

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_1 - \eta_2 i_2) \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 i_2) \bar{\gamma}_3, \\ &= \left((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3) i_1 \right) \gamma_2 \gamma_3 + \left((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) i_1 \right) \bar{\gamma}_2 \gamma_3 \\ &\quad + \left((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3) i_1 \right) \gamma_2 \bar{\gamma}_3 + \left((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) i_1 \right) \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition 1.5.4, la norme de η est

$$\begin{aligned} \|\eta\|_3^2 &= \frac{\|\eta_1 - \eta_2 i_2\|_2^2 + \|\eta_1 + \eta_2 i_2\|_2^2}{2}, \\ &= \frac{|(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3) i_1|^2 + |(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) i_1|^2}{4} \\ &\quad + \frac{|(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3) i_1|^2 + |(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) i_1|^2}{4}. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Le dernier corollaire permet de voir que la norme d'un nombre multicomplexe peut être obtenue à partir de ses composantes idempotentes complexes. Cet outil s'avérera très utile, par exemple, lors de calculs de distances dans les prochains chapitres.

Par ailleurs, la formule de la norme démontrée à la proposition 1.5.4 permet de généraliser un lien intéressant de Price entre les boules $B_n(\zeta, r)$ et les $\mathbb{M}(n)$ -disques $D_n(\zeta, r)$ [30].

Proposition 1.5.8

Soit un entier $n \geq 2$. Pour $\zeta \in \mathbb{M}(n)$ et $r_1, r_2 > 0$,

$$\begin{aligned} B_n \left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}} \right) &\subsetneq D_n(\zeta, r_1, r_2) \subsetneq B_n(\zeta, R); \\ \overline{B_n} \left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}} \right) &\subsetneq \overline{D_n}(\zeta, r_1, r_2) \subsetneq \overline{B_n}(\zeta, R). \end{aligned}$$

où $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$ et $R = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$. En particulier, si $r_1 = r_2 = r$,

$$\begin{aligned} B_n \left(\zeta, \frac{r}{\sqrt{2}} \right) &\subsetneq D_n(\zeta, r) \subsetneq B_n(\zeta, r); \\ \overline{B_n} \left(\zeta, \frac{r}{\sqrt{2}} \right) &\subsetneq \overline{D_n}(\zeta, r) \subsetneq \overline{B_n}(\zeta, r). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $r_1, r_2 > 0$, $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$ et $R = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$ et vérifions les deux inclusions strictes $B_n \left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}} \right) \subsetneq D_n(\zeta, r_1, r_2)$ et $D_n(\zeta, r_1, r_2) \subsetneq B_n(\zeta, R)$.

— D'abord, vérifions que tout $\eta \in B_n \left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}} \right)$ est aussi dans $D_n(\zeta, r_1, r_2)$. Par définition de B_n , on sait que $\|\eta - \zeta\|_n < \frac{r_0}{\sqrt{2}}$. Aussi, comme $\eta - \zeta = (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})\gamma_n + (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n$, on sait de la proposition 1.5.4 que

$$\begin{aligned} \|\eta - \zeta\|_n &= \sqrt{\frac{\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}} < \frac{r_0}{\sqrt{2}}, \\ &\Leftrightarrow \|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2 < r_0^2. \end{aligned}$$

En particulier, on a donc que $\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1} < r_0 \leq r_1$ et $\|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1} < r_0 \leq r_2$. Ainsi, on a que $\eta_{\gamma_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1)$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r_2)$, d'où $\eta \in D_n(\zeta, r_1, r_2)$ par définition d'un $\mathbb{M}(n)$ -disque.

On peut aisément s'assurer que l'inclusion est stricte en vérifiant que, en particulier, $\eta = \zeta + \rho r_1 \gamma_n + \rho r_2 \bar{\gamma}_n$, où $\frac{1}{\sqrt{2}} < \rho < 1$, est dans $D_n(\zeta, r_1, r_2)$ sans être dans $B_n(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}})$. Effectivement, comme $\rho < 1$, on voit que $\rho r_1 < r_1$ et $\rho r_2 < r_2$, d'où $\eta \in D_n(\zeta, r_1, r_2)$. Aussi, comme $r_1 \geq r_0$, $r_2 \geq r_0$ et $\rho > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a de la proposition 1.5.4 que

$$\|\eta - \zeta\|_n = \rho \|r_1 \gamma_n + r_2 \bar{\gamma}_n\|_n = \rho \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \geq \rho \sqrt{\frac{r_0^2 + r_0^2}{2}} = \rho r_0 > \frac{r_0}{\sqrt{2}},$$

d'où $\eta \notin B_n(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}})$.

- Supposons maintenant que $\eta \in D_n(\zeta, r_1, r_2)$ et vérifions que $\eta \in B_n(\zeta, R)$. Par définition d'un $\mathbb{M}(n)$ -disque, on sait que $\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1} < r_1$ et $\|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1} < r_2$. Ainsi, de la proposition 1.5.4,

$$\|\eta - \zeta\|_n = \sqrt{\frac{\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}} < \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = R,$$

d'où $\eta \in B_n(\zeta, R)$.

On peut ensuite s'assurer que $D_n(\zeta, r_1, r_2) \neq B_n(\zeta, R)$ en vérifiant que $\mu = \zeta + \rho R \gamma_n$ et $\nu = \zeta + \rho R \bar{\gamma}_n$, où $1 < \rho < \sqrt{2}$, sont dans $B_n(\zeta, R)$, mais $\mu \notin D_n(\zeta, r_1, r_2)$ si $r_2 \geq r_1$ et $\nu \notin D_n(\zeta, r_1, r_2)$ si $r_1 \geq r_2$. En effet, de la proposition 1.5.4, comme $\rho < \sqrt{2}$,

$$\|\mu - \zeta\|_n = \rho \|R \gamma_n + 0 \bar{\gamma}_n\|_n = \rho \sqrt{\frac{R^2 + 0}{2}} = \frac{\rho R}{\sqrt{2}} < R.$$

De même, $\|\nu - \zeta\|_n < R$, d'où $\mu, \nu \in B_n(\zeta, R)$. De plus, puisque $\rho > 1$, dans le cas où $r_2 \geq r_1$,

$$\rho R = \rho \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \geq \rho \sqrt{\frac{r_1^2 + r_1^2}{2}} = \rho r_1 > r_1.$$

Comme $\rho R > r_1$, on déduit que $\mu = \zeta + \rho R \gamma_n \notin D_n(\zeta, r_1, r_2)$ lorsque $r_2 \geq r_1$. De même, on pourrait vérifier que si $r_1 \geq r_2$, alors $\rho R > r_2$, d'où $\nu \notin D_n(\zeta, r_1, r_2)$.

Pour démontrer que $\overline{B_n}\left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}}\right) \subsetneq \overline{D_n}(\zeta, r_1, r_2) \subsetneq \overline{B_n}(\zeta, R)$, on procéderait de manière semblable : la preuve est donc omise. De plus, la deuxième partie de la proposition se démontre directement en posant $r_1 = r_2 = r$ puisque, dans ce cas, on calcule que $r_0 = R = r$. ■

1.6 Propriétés des espaces multicomplexes

Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$, il est possible de démontrer que $\mathbb{M}(n)$, $\mathbb{M}(n-1)^2$, \dots , $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$, \dots sont isométriquement isomorphes, où

$$\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}} = \underbrace{\mathbb{M}(k) \times \mathbb{M}(k) \times \dots \times \mathbb{M}(k)}_{2^{n-k} \text{ fois}}.$$

Pour arriver à ce résultat, il faut définir une addition, une multiplication par un scalaire, une multiplication interne et une norme sur $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ de manière à pouvoir ensuite établir un isomorphisme isométrique entre $\mathbb{M}(n)$ et $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$.

D'abord, introduisons la notation suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$, tout élément $\mu \in \mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ peut être noté

$$\mu = (\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} := (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{2^{n-k}})$$

où $\eta_j \in \mathbb{M}(k)$. À l'aide de cette écriture, on peut plus facilement définir les opérations nécessaires sur $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$:

- i) $\lambda(\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} = (\lambda\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- ii) $(\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} + (\zeta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} = (\eta_j + \zeta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}$;
- iii) si $k = n - 1$, la multiplication est simplement

$$(\eta_1, \eta_2)(\zeta_1, \zeta_2) = (\eta_1\zeta_1 - \eta_2\eta_2, \eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1);$$

si $0 \leq k < n - 1$, alors

$$(\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} (\zeta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} = (\omega_j)_{j=1}^{2^{n-k}}$$

où ω_j est tel que

$$(\eta_{2j-1} + \eta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}} (\zeta_{2j-1} + \zeta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}} = (\omega_{2j-1} + \omega_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}};$$

$$iv) \quad \|(\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2^{n-k}} \|\eta_j\|_k^2}.$$

Parmi ces opérations, on remarque que la multiplication est définie récursivement, ce qui rend son utilisation moins pratique. On illustre donc la multiplication dans un cas particulier par l'exemple suivant.

Exemple 1.6.1. Posons $\eta, \zeta \in \mathbb{BC} = \mathbb{M}(2)$ tels que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 i_2 = x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + x_4 i_1 i_2, \\ \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2 i_2 = y_1 + y_2 i_1 + y_3 i_2 + y_4 i_1 i_2. \end{aligned}$$

Les représentations de η et ζ dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{M}(1)^2$ sont donc (η_1, η_2) et (ζ_1, ζ_2) respectivement. Comme on est dans le cas où $k = 1 = n - 1$, la multiplication dans \mathbb{C}^2 est

$$(\eta_1, \eta_2)(\zeta_1, \zeta_2) = (\eta_1\zeta_1 - \eta_2\zeta_2, \eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1).$$

Ensuite, on peut calculer la multiplication dans $\mathbb{R}^4 = \mathbb{M}(0)^4$. Pour calculer le produit $(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)$, comme on est ici dans le cas où $k = 0 < n - 1$, on doit d'abord effectuer la multiplication suivante :

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2 i_1, x_3 + x_4 i_1)(y_1 + y_2 i_1, y_3 + y_4 i_1) &= (\eta_1, \eta_2)(\zeta_1, \zeta_2), \\
 &= (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2, \eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1), \\
 &= ((x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4) \\
 &\quad + (x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_3 y_4 - x_4 y_3) i_1, \\
 &\quad (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 - x_4 y_2) \\
 &\quad + (x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1) i_1).
 \end{aligned}$$

On en déduit que le produit dans \mathbb{R}^4 est

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4) &= (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4, \\
 &\quad x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_3 y_4 - x_4 y_3, \\
 &\quad x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 - x_4 y_2, \\
 &\quad x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1).
 \end{aligned}$$

On peut vérifier que ces multiplications dans \mathbb{C}^2 et \mathbb{R}^4 concordent avec la multiplication dans \mathbb{BC} puisque

$$\begin{aligned}
 \eta \zeta &= (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2) + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1) i_2, \\
 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4, \\
 &\quad + (x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_3 y_4 - x_4 y_3) i_1, \\
 &\quad + (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 - x_4 y_2) i_2, \\
 &\quad + (x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1) i_1 i_2.
 \end{aligned}$$

▲

Lemme 1.6.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k = n - 1$ et considérons l'ensemble $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}} = \mathbb{M}(n-1)^2$ muni des opérations définies précédemment. Alors, $\mathbb{M}(n)$ et $\mathbb{M}(n-1)^2$ sont isométriquement isomorphes.

DÉMONSTRATION. Lorsque $k = n - 1$, les opérations sur $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ deviennent

- i) $\lambda(\eta_1, \eta_2) = (\lambda \eta_1, \lambda \eta_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- ii) $(\eta_1, \eta_2) + (\zeta_1, \zeta_2) = (\eta_1 + \zeta_1, \eta_2 + \zeta_2)$;
- iii) $(\eta_1, \eta_2)(\zeta_1, \zeta_2) = (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2, \eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1)$;

$$iv) \quad \|(\eta_1, \eta_2)\| = \sqrt{\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2}.$$

Considérons la bijection $f : \mathbb{M}(n) \rightarrow \mathbb{M}(n-1)^2$ telle que $f(\eta_1 + \eta_2 i_n) = (\eta_1, \eta_2)$. À partir de la définition des opérations sur $\mathbb{M}(n)$ à la section 1.1, on voit clairement que f est un isomorphisme. De plus, par définition de la norme multicomplexe, on calcule directement que f est aussi une isométrie. ■

Lemme 1.6.3. *Soit deux applications $f : E_1 \rightarrow E_2$ et $g : E_2 \rightarrow E_3$ où E_1 , E_2 et E_3 sont des algèbres.*

- i) Si f et g sont des isomorphismes, $g \circ f$ est aussi un isomorphisme.*
- ii) Si f et g sont des isométries, $g \circ f$ est aussi une isométrie.*

DÉMONSTRATION. Si f et g sont des isomorphismes, on vérifie facilement que $g \circ f$ en est un aussi [6]. Par ailleurs, s'ils sont des isométries, on voit que, pour tout $x \in E_1$,

$$\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| = \|f(x)\| = \|x\|,$$

d'où $g \circ f$ est aussi une isométrie. ■

Proposition 1.6.4

Posons $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$ et considérons l'ensemble $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ muni des opérations définies précédemment. Alors, $\mathbb{M}(n)$ et $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ sont isométriquement isomorphes.

DÉMONSTRATION. Soit l'application $f_{n,k} : \mathbb{M}(k+1)^{2^{n-k-1}} \rightarrow \mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall \mu = (\eta_{2j-1} + \eta_{2j} i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}} &= (\eta_1 + \eta_2 i_{k+1}, \eta_3 + \eta_4 i_{k+1}, \dots, \eta_{2^{n-k}-1} + \eta_{2^{n-k}} i_{k+1}), \\ f_{n,k}(\mu) &= (\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{2^{n-k}}). \end{aligned}$$

En démontrant que $f_{n,k}$ est un isomorphisme isométrique pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$, on pourra en déduire, par composition successive de l'application, que les algèbres $\mathbb{M}(n)$, $\mathbb{M}(n-1)^2$, $\mathbb{M}(n-2)^4$, ..., $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ sont toutes isométriquement isomorphes entre elles. Étudions donc la bijection $f_{n,k}$.

Au lemme 1.6.2, on a déjà démontré que $f_{n,k}$ est un isomorphisme isométrique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans le cas où $k = n - 1$. Il ne reste donc qu'à vérifier les quatre propriétés d'un isomorphisme isométrique lorsque $k < n - 1$. Pour ce faire, posons

$$\begin{aligned} \mu &= (\eta_{2j-1} + \eta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}} & \text{et} & & \nu &= (\zeta_{2j-1} + \zeta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}}, \\ \Rightarrow f_{n,k}(\mu) &= (\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} & \text{et} & & f_{n,k}(\nu) &= (\zeta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}. \end{aligned}$$

i) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{M}(k)^{2^{n-k-1}}$,

$$\begin{aligned} \lambda f_{n,k}(\mu) &= \lambda(\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}, \\ &= (\lambda\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}, \\ &= f_{n,k}\left((\lambda\eta_{2j-1} + \lambda\eta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}}\right), \\ &= f_{n,k}\left(\lambda(\eta_{2j-1} + \eta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}}\right), \\ &= f_{n,k}(\lambda\mu). \end{aligned}$$

ii) Pour tout $\mu, \nu \in \mathbb{M}(k)^{2^{n-k-1}}$,

$$\begin{aligned} f_{n,k}(\mu + \nu) &= f_{n,k}\left((\eta_{2j-1} + \eta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}} + (\zeta_{2j-1} + \zeta_{2j}i_{k+1})_{j=1}^{2^{n-k-1}}\right), \\ &= f_{n,k}\left(\left((\eta_{2j-1} + \zeta_{2j-1}) + (\eta_{2j} + \zeta_{2j})i_{k+1}\right)_{j=1}^{2^{n-k-1}}\right), \\ &= (\eta_j + \zeta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}, \\ &= (\eta_j)_{j=1}^{2^{n-k}} + (\zeta_j)_{j=1}^{2^{n-k}}, \\ &= f_{n,k}(\mu) + f_{n,k}(\nu). \end{aligned}$$

iii) Par définition de la multiplication sur $\mathbb{M}(k+1)^{2^{n-k-1}}$ dans le cas où $k < n - 1$, on trouve directement que $f_{n,k}(\mu)f_{n,k}(\nu) = f_{n,k}(\mu\nu)$.

De ces trois dernières propriétés, on déduit que $f_{n,k}$ est un isomorphisme. Il reste à démontrer que l'application $f_{n,k}$ conserve la norme pour conclure qu'elle est isométrique.

iv) Pour tout $\mu \in \mathbb{M}(k)^{2^{n-k-1}}$,

$$\begin{aligned} \|f_{n,k}(\mu)\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{2^{n-k}} \|\eta_j\|_k^2} && \text{définition de la norme dans } \mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}, \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{2^{n-k-1}} (\|\eta_{2j-1}\|_k^2 + \|\eta_{2j}\|_k^2)} && \text{séparation de la somme selon la parité des indices,} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{2^{n-k-1}} \|\eta_{2j-1} + \eta_{2j}i_{k+1}\|_{k+1}^2} && \text{définition de la norme } (k+1)\text{-complexe,} \\ &= \|\mu\| && \text{définition de } \|\cdot\| \text{ sur } \mathbb{M}(k+1)^{2^{n-k-1}}. \end{aligned}$$

L'application $f_{n,k}$ est donc un isomorphisme isométrique pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. Ainsi, l'application $F_{n,k} : \mathbb{M}(n) \rightarrow \mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ telle que

$$F_{n,k} := f_{n,k} \circ f_{n,k+1} \circ f_{n,k+2} \circ \cdots \circ f_{n,n-1}$$

est aussi un isomorphisme isométrique par le lemme 1.6.3. Comme il existe un isomorphisme isométrique $F_{n,k}$ entre $\mathbb{M}(n)$ et $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$, on en conclut donc que $\mathbb{M}(n)$ et $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ sont isométriquement isomorphes pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. ■

L'exemple suivant permet de mieux visualiser les isomorphismes présentées dans la démonstration précédente.

Exemple 1.6.5. Posons $\eta \in \mathbb{TC}$ tel que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 i_3, \\ &= z_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3 + z_4 i_2 i_3, \\ &= x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + x_4 i_1 i_2 + x_5 i_3 + x_6 i_1 i_3 + x_7 i_2 i_3 + x_8 i_1 i_2 i_3. \end{aligned}$$

Alors, les fonctions $f_{3,2}$, $f_{3,1}$, $f_{3,0}$ telles que définies à la démonstration de la proposition 1.6.4 sont

$$\begin{aligned} f_{3,2}(\eta) &= (\eta_1, \eta_2); \\ f_{3,1}((\eta_1, \eta_2)) &= (z_1, z_2, z_3, z_4); \\ f_{3,0}((z_1, z_2, z_3, z_4)) &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8). \end{aligned}$$

On peut donc établir un isomorphisme isométrique entre \mathbb{TC} et \mathbb{R}^8 à partir de la composition

$$F_{3,0}(\eta) = (f_{3,0} \circ f_{3,1} \circ f_{3,2})(\eta) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8). \quad \blacktriangle$$

La proposition 1.6.4 permet donc de voir que les opérations multicomplexes peuvent être réécrites, en particulier, comme des opérations dans $\mathbb{M}(0)^{2^n} = \mathbb{R}^{2^n}$. Ce constat s'avère très utile pour programmer l'addition et la multiplication de nombres multicomplexes à partir de leurs composantes réelles.

Par ailleurs, la proposition 1.6.4 permet de vérifier, d'une deuxième manière, la proposition 1.5.2, qui stipule que

$$\|\eta\|_n = \sqrt{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k(n)} \|\eta_{\mathbf{i}}\|_k^2}.$$

En effet, comme $\mathbb{M}(n)$ et $\mathbb{M}(k)^{2^{n-k}}$ sont isométriques, le résultat est direct. De manière semblable, on peut déduire que l'espace des nombres multicomplexes est un espace de Banach.

Lemme 1.6.6. *Soit deux espaces vectoriels normés isométriquement isomorphes E_1 et E_2 . Alors, E_1 est un espace de Banach ssi E_2 en est un aussi.*

DÉMONSTRATION. Notons $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ les normes sur E_1 et E_2 respectivement. Comme les deux espaces sont isométriquement isomorphes, on sait qu'il existe un isomorphisme $f : E_1 \rightarrow E_2$ telle que $|f(x)|_2 = |x|_1$ pour tout $x \in E_1$.

\Rightarrow) Supposons que E_1 est un espace de Banach. De plus, considérons une suite de Cauchy $\{y_m\}_{m=1}^\infty \subseteq E_2$, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow |y_m - y_n|_2 < \varepsilon.$$

Comme f est une bijection, on sait qu'il existe une suite $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subseteq E_1$ telle que $f(x_m) = y_m$. Cette suite est aussi de Cauchy car

$$|x_m - x_n|_1 = |f(x_m - x_n)|_2 = |f(x_m) - f(x_n)|_2 = |y_m - y_n|_2 < \varepsilon$$

en posant $m, n \geq N$. Comme E_1 est un espace de Banach, on sait que cette suite converge vers un élément $x \in E_1$, et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_m - x|_1 < \varepsilon \quad \forall m \geq N_0.$$

Ainsi,

$$|y_m - f(x)|_2 = |f(x_m) - f(x)|_2 = |f(x_m - x)|_2 = |x_m - x|_1 < \varepsilon \quad \forall m \geq N_0.$$

Par conséquent, la suite $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ converge nécessairement vers $f(x) \in E_2$, ce qui démontre que E_2 est complet, c'est-à-dire un espace de Banach.

\Leftarrow) L'implication inverse se démontre de manière semblable en utilisant la bijection f^{-1} . ■

Proposition 1.6.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{M}(n)$ muni de l'addition, de la multiplication par un scalaire et de la norme n -complexe forme un espace de Banach.

DÉMONSTRATION. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{M}(n)$ est isométriquement isomorphe à l'espace de Banach \mathbb{R}^{2^n} (proposition 1.6.4 dans le cas où $k = 0$), on déduit du lemme 1.6.6 que $\mathbb{M}(n)$ est aussi un espace de Banach. ■

L'espace vectoriel $\mathbb{M}(n)$ est donc un espace de Banach. Cependant, on ne peut pas affirmer que $\mathbb{M}(n)$ est une algèbre de Banach. En effet, pour en être une, il faudrait que, pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$,

$$\|\eta\zeta\|_n \leq \|\eta\|_n \|\zeta\|_n,$$

ce qui ne peut pas être vérifié.

Proposition 1.6.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$, on a

$$\|\eta\zeta\|_n \leq \sqrt{2^{n-1}} \|\eta\|_n \|\zeta\|_n.$$

De plus, $\sqrt{2^{n-1}}$ est le plus petit coefficient vérifiant l'inégalité.

DÉMONSTRATION. Ce résultat a été démontré dans le cas où $n = 2$ par Martineau [21] et dans le cas où $n = 3$ par Parisé [26].

Pour vérifier la première affirmation dans le cas général, on procède par induction. Pour $n = 1$, on sait déjà que $|z_1 z_2| \leq |z_1| |z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi, supposons que $\|\alpha\beta\|_{n-1} \leq \sqrt{2^{n-2}} \|\alpha\|_{n-1} \|\beta\|_{n-1}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{M}(n-1)$ et démontrons que l'énoncé demeure vrai pour $\mathbb{M}(n)$.

En posant $\eta = \eta_1 + \eta_2 i_n$ et $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i_n$, on calcule donc que

$$\begin{aligned} \|\eta\zeta\|_n &= \|(\eta_1 + \eta_2 i_n)\zeta\|_n, \\ &= \|\eta_1 \zeta + \eta_2 \zeta i_n\|_n, \\ &\leq \|\eta_1 \zeta\|_n + \|\eta_2 \zeta i_n\|_n, \\ &= \|\eta_1 \zeta_1 + \eta_1 \zeta_2 i_n\|_n + \|\eta_2 \zeta_1 i_n - \eta_2 \zeta_2\|_n, \\ &= \sqrt{\|\eta_1 \zeta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_1 \zeta_2\|_{n-1}^2} + \sqrt{\|\eta_2 \zeta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2 \zeta_2\|_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, on voit que

$$\begin{aligned}
\|\eta\zeta\|_n &\leq \sqrt{2^{n-2}\|\eta_1\|_{n-1}^2\|\zeta_1\|_{n-1}^2 + 2^{n-2}\|\eta_1\|_{n-1}^2\|\zeta_2\|_{n-1}^2} \\
&\quad + \sqrt{2^{n-2}\|\eta_2\|_{n-1}^2\|\zeta_1\|_{n-1}^2 + 2^{n-2}\|\eta_2\|_{n-1}^2\|\zeta_2\|_{n-1}^2}, \\
&= \sqrt{2^{n-2}\|\eta_1\|_{n-1}^2(\|\zeta_1\|_{n-1}^2 + \|\zeta_2\|_{n-1}^2)} + \sqrt{2^{n-2}\|\eta_2\|_{n-1}^2(\|\zeta_1\|_{n-1}^2 + \|\zeta_2\|_{n-1}^2)}, \\
&= \sqrt{2^{n-2}}\|\eta_1\|_{n-1}\|\zeta\|_n + \sqrt{2^{n-2}}\|\eta_2\|_{n-1}\|\zeta\|_n, \\
&= \sqrt{2^{n-2}}(\|\eta_1\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1})\|\zeta\|_n.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\|\eta_1\|_{n-1} - \|\eta_2\|_{n-1})^2, \\
\Rightarrow 0 &\leq \|\eta_1\|_{n-1}^2 - 2\|\eta_1\|_{n-1}\|\eta_2\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1}^2, \\
\Rightarrow 2\|\eta_1\|_{n-1}\|\eta_2\|_{n-1} &\leq \|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2, \\
\Rightarrow \|\eta_1\|_{n-1}^2 + 2\|\eta_1\|_{n-1}\|\eta_2\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1}^2 &\leq 2\|\eta_1\|_{n-1}^2 + 2\|\eta_2\|_{n-1}^2, \\
\Rightarrow (\|\eta_1\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1})^2 &\leq 2(\|\eta_1\|_{n-1}^2 + \|\eta_2\|_{n-1}^2), \\
\Rightarrow \|\eta_1\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1} &\leq \sqrt{2}\|\eta\|_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\eta\zeta\|_n \leq \sqrt{2^{n-2}}(\|\eta_1\|_{n-1} + \|\eta_2\|_{n-1})\|\zeta\|_n \leq \sqrt{2^{n-1}}\|\eta\|_n\|\zeta\|_n.$$

On obtient donc le résultat voulu.

Pour ce qui est de la deuxième affirmation de la proposition, c'est-à-dire que $\sqrt{2^{n-1}}$ est optimal, il suffit de vérifier qu'il existe au moins un $\eta \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\|\eta^2\|_n = \sqrt{2^{n-1}}\|\eta\|_n^2$. Posons $\eta = \gamma \in S_2(n)$. À titre d'exemple, on pourrait supposer que

$$\gamma = \gamma_2\gamma_3 \dots \gamma_n.$$

Par le lemme 1.3.5, on sait que $\gamma^2 = \gamma$. De plus, en utilisant le corollaire 1.5.6, on voit que

$$\|\gamma\|_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Ainsi,

$$\|\gamma^2\|_n = \|\gamma\|_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sqrt{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} = \sqrt{2^{n-1}}\|\gamma\|_n^2.$$

Le coefficient $\sqrt{2^{n-1}}$ est donc optimal. ■

La proposition 1.6.8 permet donc de voir que l'algèbre \mathbb{C} forme une algèbre de Banach, mais que ce n'est pas le cas pour les algèbres multicomplexes en général.

1.7 Fonctions multicomplexes

Il est possible d'étendre les concepts d'holomorphicité et de différentiabilité aux espaces multicomplexes. Ce faisant, on arrive non seulement à généraliser ces concepts fondamentaux, mais aussi à généraliser les fonctions réelles et complexes couramment utilisées.

Cependant, pour bien définir la différentiabilité multicomplexe, il faut prendre en considération le fait que tout nombre multicomplexe n'est pas nécessairement inversible [30, 34].

Définition 1.7.1 – Différentiabilité multicomplexe

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$ où $U \subseteq \mathbb{M}(n)$ est ouvert. Pour $\zeta \in U$, on dit que f est *dérivable* en ζ si la limite

$$f'(\zeta) := \lim_{\substack{\eta \rightarrow \zeta \\ (\text{inv.})}} \frac{f(\eta) - f(\zeta)}{\eta - \zeta} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \zeta \\ (\text{inv.})}} (f(\eta) - f(\zeta))(\eta - \zeta)^{-1}$$

existe en considérant seulement les nombres $\eta \in U$ tels que $(\eta - \zeta) \in \mathbb{M}(n)^{-1}$. La limite $f'(\zeta)$ est alors la *dérivée* de f en ζ .

Définition 1.7.2 – Holomorphicité multicomplexe

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$ où $U \subseteq \mathbb{M}(n)$ est ouvert. Si f est dérivable pour tout point d'un ensemble ouvert contenant $\zeta \in U$, on dit alors qu'elle est *holomorphe* en ζ . En particulier, si f est dérivable en tout point de son domaine ouvert U , alors f est holomorphe sur U .

Par ailleurs, on sait que l'holomorphicité complexe est intimement liée au concept de séries de puissances, d'où le concept d'analyticité de fonctions.

Définition 1.7.3 – analyticité multicomplexe

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$ où $U \subseteq \mathbb{M}(n)$ est ouvert. Pour $\zeta \in U$, on dit que f est *analytique* en ζ s'il existe des coefficients $\alpha_j \in \mathbb{M}(n)$ tels que

$$f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\eta - \zeta)^j$$

pour tout η dans un certain voisinage $B_n(\zeta, r)$ de ζ .

On peut démontrer qu'une fonction complexe est holomorphe sur un certain domaine si et seulement si elle possède un développement en série de puissances en tout point de ce domaine. Un résultat analogue existe pour les fonctions multicomplexes. Pour arriver à le démontrer, on va étudier les composantes idempotentes des fonctions multicomplexes. Toutefois, certaines notions préliminaires doivent d'abord être étudiées.

Lemme 1.7.4. *Soit $\alpha_j, \eta, \zeta \in \mathbb{M}(n)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. La série de puissances*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\eta - \zeta)^j$$

converge sur une boule $B_n(\zeta, r_0)$, où $r > 0$, ssi les séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j, \gamma_n} (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j,$$

où $\alpha_j = \alpha_{j, \gamma_n} \gamma_n + \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$, convergent sur des boules $B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1)$ et $B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r_2)$ respectivement où $r_1, r_2 > 0$. De plus, lorsqu'on a convergence, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\eta - \zeta)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j, \gamma_n} (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n.$$

DÉMONSTRATION. D'abord, posons que

$$\begin{aligned} P(m) &= \sum_{j=0}^m \alpha_j (\eta - \zeta)^j, \\ P_{\gamma_n}(m) &= \sum_{j=0}^m \alpha_{j, \gamma_n} (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j, \\ P_{\bar{\gamma}_n}(m) &= \sum_{j=0}^m \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j. \end{aligned}$$

En utilisant la multiplication terme à terme, on peut calculer que

$$\begin{aligned}
P(m) &= \sum_{j=0}^m (\alpha_{j,\gamma_n} \gamma_n + \alpha_{j,\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n) \left((\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}) \gamma_n + (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}) \bar{\gamma}_n \right)^j, \\
&= \sum_{j=0}^m (\alpha_{j,\gamma_n} \gamma_n + \alpha_{j,\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n) \left((\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n \right), \\
&= \sum_{j=0}^m \left(\alpha_{j,\gamma_n} (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + \alpha_{j,\bar{\gamma}_n} (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n \right), \\
&= \sum_{j=0}^m \alpha_{j,\gamma_n} (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + \sum_{j=0}^m \alpha_{j,\bar{\gamma}_n} (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n, \\
&= P_{\gamma_n}(m) \gamma_n + P_{\bar{\gamma}_n}(m) \bar{\gamma}_n.
\end{aligned}$$

\Rightarrow) Supposons que $P(m) \rightarrow L \in \mathbb{M}(n)$ lorsque $m \rightarrow \infty$ pour tout $\eta \in B_n(\zeta, r)$ où $r > 0$. De plus, posons que $L = L_{\gamma_n} \gamma_n + L_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$. Alors, de la proposition 1.5.4, on sait que

$$\|P(m) - L\|_n = \sqrt{\frac{\|P_{\gamma_n}(m) - L_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|P_{\bar{\gamma}_n}(m) - L_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}}. \quad (1.3)$$

Comme $P(m) \rightarrow L$, on sait que $\|P(m) - L\|_n \rightarrow 0$. Ainsi, $\|P_{\gamma_n}(m) - L_{\gamma_n}\|_n \rightarrow 0$ et $\|P_{\bar{\gamma}_n}(m) - L_{\bar{\gamma}_n}\|_n \rightarrow 0$. On en déduit donc que

$$P_{\gamma_n}(m) \rightarrow L_{\gamma_n} \in \mathbb{M}(n-1) \quad \text{et} \quad P_{\bar{\gamma}_n}(m) \rightarrow L_{\bar{\gamma}_n} \in \mathbb{M}(n-1)$$

pour tout $\eta \in B_n(\zeta, r)$. Comme $D_n(\zeta, r) \subset B_n(\zeta, r)$ de la proposition 1.5.8, c'est aussi vrai pour tout $\eta \in D_n(\zeta, r)$ et, par conséquent, les deux sommations $P_{\gamma_n}(m)$ et $P_{\bar{\gamma}_n}(m)$ convergent pour tout $\eta_{\gamma_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r)$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r)$ par définition de $D_n(\zeta, r)$.

\Leftarrow) Supposons maintenant que $P_{\gamma_n}(m) \rightarrow L_{\gamma_n} \in \mathbb{M}(n-1)$ et $P_{\bar{\gamma}_n}(m) \rightarrow L_{\bar{\gamma}_n} \in \mathbb{M}(n-1)$ sur des boules $B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1)$ et $B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r_2)$. Alors, en posant $L = L_{\gamma_n} \gamma_n + L_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$, on voit de l'équation 1.3 que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P(m) - L\|_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\|P_{\gamma_n}(m) - L_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|P_{\bar{\gamma}_n}(m) - L_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}} = 0.$$

On déduit donc que $P(m) \rightarrow L \in \mathbb{M}(n)$ pour tout $\eta_{\gamma_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1)$ et pour tout $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r_2)$. De manière équivalente, par définition d'un $\mathbb{M}(n)$ -disque, $P(m)$ converge pour tout $\eta \in D_n(\zeta, r_1, r_2)$. De plus, de la proposition 1.5.8, on sait que $B_n\left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}}\right) \subset D_n(\zeta, r_1, r_2)$ où $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$. Ainsi, $P(m)$ converge en particulier sur la boule $B_n\left(\zeta, \frac{r_0}{\sqrt{2}}\right)$. ■

Malgré que les propositions suivantes pourraient être démontrées dans le cas général où $U \subseteq \mathbb{M}(n)$ est ouvert [30], on va supposer pour le reste de la section que U est un ensemble $\mathbb{M}(n)$ -cartésien, c'est-à-dire que $U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$ où $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ sont ouverts. Cette hypothèse permettra d'alléger les démonstrations et les résultats ainsi obtenus seront suffisants pour généraliser les fonctions réelles et complexes aux espaces multicomplexes.

Proposition 1.7.5

Considérons deux fonctions analytiques $f_{\gamma_n} : U_1 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ et $f_{\bar{\gamma}_n} : U_2 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ où $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ sont deux ensembles ouverts. Alors, la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$, où $U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$, telle que $f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n$ est analytique.

DÉMONSTRATION. Posons $\zeta \in U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$. Alors, $\zeta = \zeta_{\gamma_n}\gamma_n + \zeta_{\bar{\gamma}_n}\bar{\gamma}_n$ où $\zeta_{\gamma_n} \in U_1$ et $\zeta_{\bar{\gamma}_n} \in U_2$. Comme f_{γ_n} et $f_{\bar{\gamma}_n}$ sont analytiques, on sait qu'il existe des séries de puissances convergentes pour tout $\eta_{\gamma_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1)$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r_2)$ telles que

$$f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_j(\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + \beta_j(\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n \right).$$

En utilisant la multiplication terme à terme, on calcule que

$$f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j \gamma_n + \beta_j \bar{\gamma}_n) \left((\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j \gamma_n + \beta_j \bar{\gamma}_n) (\eta - \zeta)^j.$$

Du lemme 1.7.4, on voit que cette dernière série est convergente sur une boule $B_n(\zeta, r_0)$. Ainsi, on conclut que la fonction f est analytique. ■

Proposition 1.7.6

Soit une fonction analytique $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$ où $U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$ et les ensembles $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ sont ouverts. Alors, il existe deux fonctions analytiques $f_{\gamma_n} : U_1 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ et $f_{\bar{\gamma}_n} : U_2 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ telles que

$$f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n.$$

DÉMONSTRATION. Comme f est analytique, on sait que, pour $\zeta \in U$,

$$f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\eta - \zeta)^j$$

pour tout η dans un certain voisinage $B_n(\zeta, r_0)$ de ζ . En utilisant la multiplication terme à terme et en posant $\alpha_j = \alpha_{j, \gamma_n} \gamma_n + \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$, on voit que

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_{j, \gamma_n} \gamma_n + \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n) \left((\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n \right), \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j, \gamma_n} (\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})^j \gamma_n + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j, \bar{\gamma}_n} (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})^j \bar{\gamma}_n. \end{aligned}$$

Du lemme 1.7.4, on sait que ces deux dernières sommations sont convergentes pour tout $\eta_{\gamma_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\gamma_n}, r_1)$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in B_{n-1}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, r_2)$. Elles représentent donc deux fonctions analytiques $f_{\gamma_n} : U_1 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ et $f_{\bar{\gamma}_n} : U_2 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$, d'où le résultat. ■

Ainsi, on voit de la proposition 1.7.5 qu'on peut déterminer si une fonction f est analytique à partir de ses composantes idempotentes. Réciproquement, la proposition 1.7.6 nous assure que toute fonction analytique a des composantes idempotentes analytiques. On peut trouver des résultats semblables par rapport à l'holomorphie de fonctions.

Proposition 1.7.7

Considérons deux fonctions holomorphes $f_{\gamma_n} : U_1 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ et $f_{\bar{\gamma}_n} : U_2 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ où $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ sont deux ensembles ouverts. Alors, la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$, où $U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$, telle que $f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n$ est holomorphe.

DÉMONSTRATION. Si f_{γ_n} et $f_{\bar{\gamma}_n}$ sont holomorphes, alors pour tout nombres $\eta_{\gamma_n}, \zeta_{\gamma_n} \in U_1$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n}, \zeta_{\bar{\gamma}_n} \in U_2$ tels que $\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}$ sont inversibles, les limites

$$f'_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n}) = \lim_{\substack{\eta_{\gamma_n} \rightarrow \zeta_{\gamma_n} \\ (\text{inv.})}} \frac{f_{\gamma_n}(\eta_{\gamma_n}) - f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})}{\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}} \quad \text{et} \quad f'_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}) = \lim_{\substack{\eta_{\bar{\gamma}_n} \rightarrow \zeta_{\bar{\gamma}_n} \\ (\text{inv.})}} \frac{f_{\bar{\gamma}_n}(\eta_{\bar{\gamma}_n}) - f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})}{\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}}$$

existent. De plus, on remarque que

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \zeta \\ (\text{inv.})}} \frac{f_{\gamma_n}(\eta_{\gamma_n}) - f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})}{\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}} = \lim_{\substack{\eta_{\gamma_n} \rightarrow \zeta_{\gamma_n} \\ (\text{inv.})}} \frac{f_{\gamma_n}(\eta_{\gamma_n}) - f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})}{\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}} = f'_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n}).$$

De même,

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \zeta \\ (\text{inv.})}} \frac{f_{\bar{\gamma}_n}(\eta_{\bar{\gamma}_n}) - f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})}{\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}} = \lim_{\substack{\eta_{\bar{\gamma}_n} \rightarrow \zeta_{\bar{\gamma}_n} \\ (\text{inv.})}} \frac{f_{\bar{\gamma}_n}(\eta_{\bar{\gamma}_n}) - f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})}{\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}} = f'_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n}).$$

Par ailleurs, comme $\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}$ sont inversibles, on sait que $\eta - \zeta$ est aussi inversible par la proposition 1.4.1 et on peut calculer que

$$\begin{aligned} \frac{f(\eta) - f(\zeta)}{\eta - \zeta} &= \frac{(f_{\gamma_n}(\eta) - f_{\gamma_n}(\zeta))\gamma_n + (f_{\bar{\gamma}_n}(\eta) - f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta))\bar{\gamma}_n}{(\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n})\gamma_n + (\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n}, \\ &= \frac{f_{\gamma_n}(\eta) - f_{\gamma_n}(\zeta)}{\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}} \gamma_n + \frac{f_{\bar{\gamma}_n}(\eta) - f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta)}{\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}} \bar{\gamma}_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que f est différentiable en ζ car

$$f'(\zeta) = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \zeta \\ (\text{inv.})}} \left(\frac{f_{\gamma_n}(\eta) - f_{\gamma_n}(\zeta)}{\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}} \gamma_n + \frac{f_{\bar{\gamma}_n}(\eta) - f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta)}{\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}} \bar{\gamma}_n \right) = f'_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f'_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n.$$

■

Proposition 1.7.8

Soit une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$ où $U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$ et les ensembles $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ sont ouverts. Alors, il existe deux fonctions holomorphes $f_{\gamma_n} : U_1 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ et $f_{\bar{\gamma}_n} : U_2 \rightarrow \mathbb{M}(n-1)$ telles que

$$f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat a été vérifié par Vajiac et Vajiac (corollaire 2.4 dans [35]). Essentiellement, on peut démontrer que les équations de Cauchy-Riemann se généralisent aux fonctions multicomplexes, ce qui a comme conséquence que f_{γ_n} et $f_{\bar{\gamma}_n}$ sont holomorphes et ne dépendent que de η_{γ_n} et $\eta_{\bar{\gamma}_n}$ respectivement. Le lecteur intéressé peut aussi lire [34] pour en savoir plus sur les équations de Cauchy-Riemann généralisées. ■

À partir des résultats précédents, on peut démontrer l'équivalence entre analyticité et holomorphie.

Proposition 1.7.9

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{M}(n)$ où $U = U_1 \times_{\gamma_n} U_2$ et $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$ sont deux ensembles ouverts. Alors, la fonction f est analytique sur U ssi elle est holomorphe sur U .

DÉMONSTRATION. On sait déjà qu'une fonction complexe est analytique ssi elle est holomorphe. Pour $n \geq 2$, démontrons donc la proposition en supposant qu'elle est vérifiée pour $n-1$.

- \Rightarrow) Supposons d'abord que f est analytique sur U . Alors, par la proposition 1.7.6, on sait que $f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta_{\gamma_n})\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n$ où f_{γ_n} et $f_{\bar{\gamma}_n}$ sont analytiques. Ainsi, par hypothèse d'induction on sait qu'elles sont aussi holomorphes et on déduit par la proposition 1.7.7 que f doit aussi être holomorphe.
- \Leftarrow) Supposons maintenant que f est holomorphe sur U . De la proposition 1.7.8, on sait que $f(\zeta) = f_{\gamma_n}(\zeta)\gamma_n + f_{\bar{\gamma}_n}(\zeta)\bar{\gamma}_n$ où f_{γ_n} et $f_{\bar{\gamma}_n}$ sont holomorphes. On déduit ensuite que f_{γ_n} et $f_{\bar{\gamma}_n}$ sont analytiques par hypothèse d'induction et, par la proposition 1.7.5, f doit être analytique. ■

Ce dernier résultat permet de voir que les fonctions multicomplexes se comportent de manière semblable aux fonctions complexes. En effet, on pourrait même généraliser les équations de Cauchy-Riemann aux fonctions n -complexes afin d'obtenir un système de 2^n équations [34, 35].

En utilisant ces résultats, on peut aisément généraliser certaines fonctions réelles ou complexes aux espaces multicomplexes de deux manières différentes : soit en utilisant la représentation idempotente, soit en utilisant le développement en série d'une fonction.

Exemple 1.7.10. Considérons la fonction exponentielle complexe e^z . On peut généraliser cette fonction à l'espace bicomplexe \mathbb{BC} de la manière suivante : pour tout nombre bicomplexe $\eta = z_1\gamma_2 + z_2\bar{\gamma}_2 \in \mathbb{BC}$,

$$e^\eta = e^{z_1}\gamma_2 + e^{z_2}\bar{\gamma}_2 \quad \text{ou} \quad e^\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j}{j!}.$$

On peut aisément vérifier que ces deux expressions sont égales :

$$\begin{aligned}
 e^{z_1} \gamma_2 + e^{z_2} \bar{\gamma}_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_1^j}{j!} \gamma_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_2^j}{j!} \bar{\gamma}_2, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_1^j \gamma_2 + z_2^j \bar{\gamma}_2}{j!}, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_1 \gamma_2 + z_2 \bar{\gamma}_2)^j}{j!}, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j}{j!}.
 \end{aligned}$$

▲

Exemple 1.7.11. Considérons le cosinus complexe $\cos z$. Pour tout $\eta = z_1 \gamma_2 + z_2 \bar{\gamma}_2 \in \mathbb{BC}$, on peut définir que

$$\cos \eta = \cos(z_1) \gamma_2 + \cos(z_2) \bar{\gamma}_2 \quad \text{ou} \quad \cos \eta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta^{2j}}{2j!}.$$

Ces deux expressions ont équivalentes puisque

$$\begin{aligned}
 \cos(z_1) \gamma_2 + \cos(z_2) \bar{\gamma}_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z_1^{2j}}{2j!} \gamma_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z_2^{2j}}{2j!} \bar{\gamma}_2, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (z_1^{2j} \gamma_2 + z_2^{2j} \bar{\gamma}_2)}{2j!}, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (z_1 \gamma_2 + z_2 \bar{\gamma}_2)^{2j}}{2j!}, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta^{2j}}{2j!}.
 \end{aligned}$$

▲

Mandelbrot et Julia généralisés

Dans ce chapitre, les ensembles de Mandelbrot et de Julia généralisés sont présentés et certaines de leurs propriétés sont soulignées. Les résultats énoncés sont des généralisations de résultats démontrés dans [12, 13, 21, 22, 26, 28, 33].

2.1 Multibrots

Les fractales complexes classiques sont définies à l'aide de l'itération de polynôme. En effet, considérons le polynôme complexe $f_c(z) = z^2 + c$ où $c \in \mathbb{C}$. On note que, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$f_c^m(z) = \begin{cases} z & \text{si } m = 0, \\ (f_c \circ f_c^{m-1})(z) & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

Autrement dit, lorsque $m \geq 1$, f_c^m correspond au polynôme f_c composé m fois, c'est-à-dire

$$f_c^m = \underbrace{f_c \circ f_c \circ \cdots \circ f_c}_{m \text{ fois}}.$$

L'ensemble de Mandelbrot standard \mathcal{M} peut être défini de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \{f_c^m(0)\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée}\}.$$

Pour déterminer si un nombre complexe c est dans l'ensemble de Mandelbrot, on doit donc itérer le polynôme $f_c(z)$ en $z = 0$ et s'assurer que la suite ainsi obtenue ne tend pas vers l'infini [3]. En effet, on verra à la proposition 2.1.4 que si la suite $\{f_c^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ n'est pas bornée, elle doit nécessairement tendre vers l'infini. Dans le cas de l'ensemble

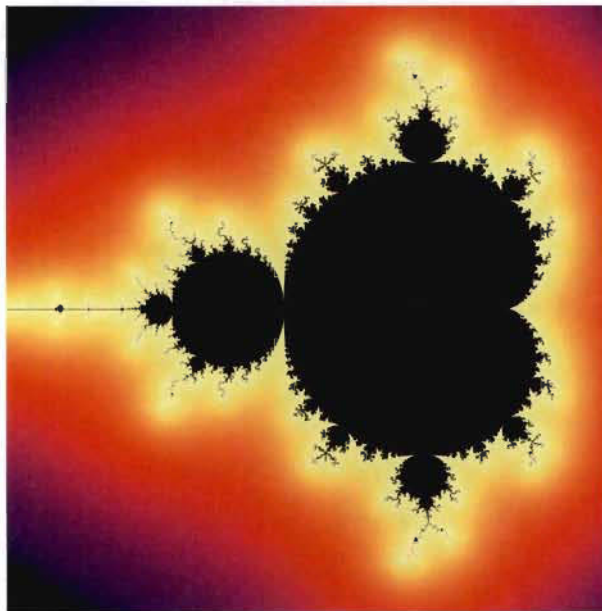


FIGURE 2.1 – L'ensemble de Mandelbrot standard

de Mandelbrot, cette suite ne dépend que du paramètre c et les premiers termes sont

$$\begin{aligned}
 f_c(0) &= 0^2 + c = c; \\
 f_c^2(0) &= (f_c(0))^2 + c = c^2 + c; \\
 f_c^3(0) &= (f_c^2(0))^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c; \\
 f_c^4(0) &= (f_c^3(0))^2 + c = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c; \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

On voit donc que les calculs deviennent lourds assez rapidement. C'est pourquoi, malgré qu'on puisse facilement générer l'ensemble de Mandelbrot par ordinateur, il est très difficile de déterminer explicitement quels éléments le constituent.

Comme la définition de l'ensemble de Mandelbrot est basée sur des opérations élémentaires de base, c'est-à-dire l'addition et l'exponentiation, on peut aisément généraliser cet ensemble aux espaces multicomplexes. La définition présentée ci-dessous est une généralisation de celles de Garant-Pelletier et Rochon [13] et de Parisé [26].

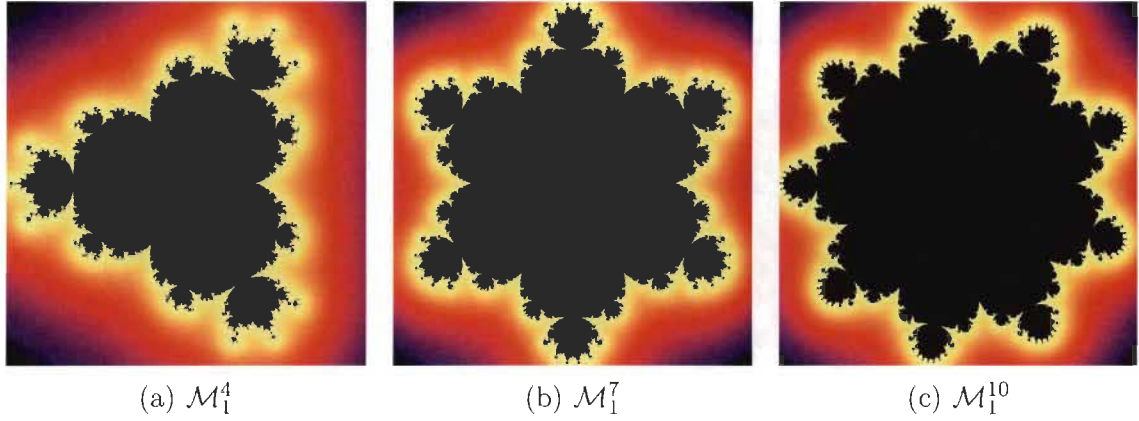


FIGURE 2.2 – Multibrots complexes

Définition 2.1.1 – Multibrot

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$ et considérons le polynôme $Q_{p,c} : \mathbb{M}(n) \rightarrow \mathbb{M}(n)$ tel que $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$ et $c \in \mathbb{M}(n)$. Le *Multibrot* n -complexe d'ordre p est l'ensemble

$$\mathcal{M}_n^p = \{c \in \mathbb{M}(n) \mid \{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée}\}.$$

Remarque. Les indices supérieurs n'ont pas toujours le même sens dépendant du contexte. Par exemple, le nombre p est un exposant dans l'expression c^p tandis qu'il est simplement un indice dans la notation \mathcal{M}_n^p . En général, p est un exposant lorsqu'il est appliqué à un nombre, mais seulement un indice lorsqu'il fait partie de la notation d'un ensemble. Par ailleurs, on utilise plutôt m comme indice supérieur pour noter la composition de fonctions.

Remarquons que la définition 2.1.1 ne généralise pas seulement l'ensemble de Mandelbrot aux espaces multicomplexes : elle généralise aussi le polynôme quadratique f_c à un polynôme $Q_{p,c}$ de degré entier $p \geq 2$. Il aurait aussi été possible d'utiliser un nombre réel quelconque mais, dans le cadre de ce travail, on s'intéresse particulièrement au cas où l'exposant $p \geq 2$ est entier.

On peut voir à la figure 2.2 quelques Multibrots complexes. Pour visualiser les Multibrots généralisés aux espaces multicomplexes, il faudra d'abord aborder les coupes tridimensionnelles de ces ensembles, ce qui sera fait aux prochains chapitres.

Pour générer ces ensembles fractals, il est nécessaire d'établir certains critères pour

déterminer si un nombre est compris dans l'ensemble ou non. La proposition suivante permet de déterminer les éléments du Multibrot \mathcal{M}_n^p à partir de ceux de \mathcal{M}_{n-1}^p . Avant de la démontrer, un lemme est nécessaire.

Lemme 2.1.2. *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$. Alors,*

$$Q_{p,c}^m(\eta) = Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, on utilise le principe d'induction et la multiplication terme à terme sous la représentation idempotente. Dans le cas où $m = 0$, on calcule directement que

$$Q_{p,c}^0(\eta) = \eta = \eta_{\gamma_n}\gamma_n + \eta_{\bar{\gamma}_n}\bar{\gamma}_n = Q_{p,c_{\gamma_n}}^0(\eta_{\gamma_n})\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^0(\eta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n.$$

Ensuite, en supposant que $Q_{p,c}^{m-1}(\eta) = Q_{p,c_{\gamma_n}}^{m-1}(\eta_{\gamma_n})\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^{m-1}(\eta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n$, on voit que

$$\begin{aligned} Q_{p,c}^m(\eta) &= \left(Q_{p,c}^{m-1}(\eta)\right)^p + c, \\ &= \left(Q_{p,c_{\gamma_n}}^{m-1}(\eta_{\gamma_n})\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^{m-1}(\eta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n\right)^p + (c_{\gamma_n}\gamma_n + c_{\bar{\gamma}_n}\bar{\gamma}_n), \\ &= \left(Q_{p,c_{\gamma_n}}^{m-1}(\eta_{\gamma_n})\right)^p \gamma_n + \left(Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^{m-1}(\eta_{\bar{\gamma}_n})\right)^p \bar{\gamma}_n + c_{\gamma_n}\gamma_n + c_{\bar{\gamma}_n}\bar{\gamma}_n, \\ &= \left(\left(Q_{p,c_{\gamma_n}}^{m-1}(\eta_{\gamma_n})\right)^p + c_{\gamma_n}\right) \gamma_n + \left(\left(Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^{m-1}(\eta_{\bar{\gamma}_n})\right)^p + c_{\bar{\gamma}_n}\right) \bar{\gamma}_n, \\ &= Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le résultat voulu par le principe d'induction. ■

Proposition 2.1.3

Soit $n, p \in \mathbb{N}^$ où $p \geq 2$. Le Multibrot \mathcal{M}_n^p est égal au produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien*

$$\mathcal{M}_n^p = \mathcal{M}_{n-1}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{M}_{n-1}^p.$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que ces deux ensembles sont égaux, on doit vérifier que

$$c = c_{\gamma_n}\gamma_n + c_{\bar{\gamma}_n}\bar{\gamma}_n \in \mathcal{M}_n^p \Leftrightarrow (c_{\gamma_n}, c_{\bar{\gamma}_n}) \in \mathcal{M}_{n-1}^p \times \mathcal{M}_{n-1}^p.$$

En utilisant le lemme 2.1.2 dans le cas particulier où $\eta = 0 = 0\gamma_n + 0\bar{\gamma}_n$, on voit que $Q_{p,c}^m(0) = Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(0)\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(0)\bar{\gamma}_n$. De plus, on sait par la proposition 1.5.4 que la

norme d'un nombre multicomplexe peut être exprimée en fonction de la norme de ses composantes idempotentes, d'où

$$\|Q_{p,c}^m(0)\|_n = \sqrt{\frac{\|Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(0)\|_{n-1}^2 + \|Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(0)\|_{n-1}^2}{2}}.$$

Ainsi, on en déduit que la suite $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty$ est bornée ssi les suites $\{Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(0)\}_{m=1}^\infty$ et $\{Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(0)\}_{m=1}^\infty$ le sont aussi. Autrement dit, par définition de \mathcal{M}_n^p , on conclut que $c \in \mathcal{M}_n^p$ ssi $c_{\gamma_n} \in \mathcal{M}_{n-1}^p$ et $c_{\bar{\gamma}_n} \in \mathcal{M}_{n-1}^p$, d'où le résultat. ■

Ce dernier résultat permet de voir qu'il existe une relation forte entre les Multibrots n -complexes et leurs analogues $(n-1)$ -complexes. Ainsi, il est possible de déduire plusieurs propriétés de \mathcal{M}_n^p à partir de celles de \mathcal{M}_{n-1}^p . Par exemple, le résultat suivant, démontré dans le cas où $n = 1$ par Rochon et Parisé [28] et dans le cas où $n \in \{2, 3\}$ par Parisé [26], se généralise dans le cas des Multibrots multicomplexes et s'avérera utile lors de la génération de Multibrots.

Proposition 2.1.4

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$ et considérons $c \in \mathbb{M}(n)$. Alors,

$$c \in \mathcal{M}_n^p \Leftrightarrow \|Q_{p,c}^m(0)\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION. Le cas complexe, c'est-à-dire lorsque $n = 1$, a été démontré par Rochon et Parisé (théorème 3 dans [28]). On explique ici l'idée de la preuve. Pour $c \in \mathbb{C}$, supposons que $|Q_{p,c}^m(0)| > 2^{\frac{1}{p-1}}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ et posons $\delta = |Q_{p,c}^m(0)| - 2^{\frac{1}{p-1}} > 0$. On peut alors calculer que $|Q_{p,c}^{m+k}(0)| \geq 2^{\frac{1}{p-1}} + (2p)^k \delta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $2p > 1$, on voit que $Q_{p,c}^{m+k}(0) \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Autrement dit, lorsque la suite d'itérées $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty$ sort du disque de rayon $2^{\frac{1}{p-1}}$, elle se met aussitôt à diverger vers l'infini.

Généralisons maintenant le résultat en utilisant le principe d'induction.

⇐) Considérons d'abord $c \in \mathbb{M}(n)$ tel que $\|Q_{p,c}^m(0)\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors, la suite $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty$ est bornée et on déduit immédiatement que $c \in \mathcal{M}_n^p$ par définition des Multibrots.

\Rightarrow) Considérons maintenant $c \in \mathcal{M}_n^p$ et démontrons que $\|Q_{p,c}^m(0)\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De la proposition 2.1.3, on sait que $c_{\gamma_n} \in \mathcal{M}_{n-1}^p$ et $c_{\bar{\gamma}_n} \in \mathcal{M}_{n-1}^p$. Par hypothèse d'induction, on en déduit que

$$\|Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(0)\|_{n-1} \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{et} \quad \|Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(0)\|_{n-1} \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

De plus, le lemme 2.1.2 nous assure que $Q_{p,c}^m(0) = Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(0)\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(0)\bar{\gamma}_n$. De la proposition 1.5.4, on calcule donc que

$$\|Q_{p,c}^m(0)\|_n = \sqrt{\frac{\|Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(0)\|_{n-1}^2 + \|Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(0)\|_{n-1}^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{\left(2^{\frac{1}{p-1}}\right)^2 + \left(2^{\frac{1}{p-1}}\right)^2}{2}} = 2^{\frac{1}{p-1}},$$

d'où le résultat voulu. ■

Corollaire 2.1.5

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$. Alors, $\mathcal{M}_n^p \subseteq \overline{B}_n(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$.

DÉMONSTRATION. Soit $c \in \mathcal{M}_n^p$. De la proposition 2.1.4, on sait que $\|Q_{p,c}^m(0)\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dans le cas particulier où $m = 1$, cette inégalité devient $\|c\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$. Ainsi,

$$c \in \mathcal{M}_n^p \Rightarrow \|c\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow c \in \overline{B}_n(0, 2^{\frac{1}{p-1}}),$$

d'où $\mathcal{M}_n^p \subseteq \overline{B}_n(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$. ■

On voit donc que les Multibrots sont des ensembles bornés. Une propriété intéressante qui découle partiellement de cette observation est la compacité.

Lemme 2.1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons l'ensemble $X = X_1 \times_{\gamma_n} X_2$ où $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$. Alors,

- i) les ensembles X_1 et X_2 sont connexes ssi X l'est aussi;
- ii) les ensembles X_1 et X_2 sont compacts ssi X l'est aussi.

DÉMONSTRATION. Considérons l'application $f : X_1 \times X_2 \rightarrow X$ telle que

$$f(\eta_1, \eta_2) = \eta_1\gamma_n + \eta_2\bar{\gamma}_n.$$

L'application f est clairement bijective. De plus, elle et son inverse sont continues, d'où f est un homéomorphisme entre $X_1 \times X_2$ et X . Ainsi, on voit que [14]

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont connexes} \Leftrightarrow X_1 \times X_2 \text{ est connexe} \Leftrightarrow X_1 \times_{\gamma_n} X_2 \text{ est connexe.}$$

On peut démontrer de la même manière que X_1 et X_2 sont compacts ssi X l'est aussi. ■

Proposition 2.1.7

Soit $n, p \in \mathbb{N}^$ où $p \geq 2$. Le Multibrot \mathcal{M}_n^p est compact, c'est-à-dire qu'il est borné et fermé.*

DÉMONSTRATION. Du corollaire 2.1.5, on voit que \mathcal{M}_n^p est borné pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc, en particulier, \mathcal{M}_1^p est borné. De plus, il a été démontré par Parisé que \mathcal{M}_1^p est fermé [26]. Ainsi, on déduit que \mathcal{M}_1^p est compact.

Ensuite, de la proposition 2.1.3, on sait que $\mathcal{M}_n^p = \mathcal{M}_{n-1}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{M}_{n-1}^p$. Ainsi, du lemme 2.1.6, comme \mathcal{M}_{n-1}^p est compact, \mathcal{M}_n^p doit l'être aussi. Par conséquent, on conclut par le principe d'induction que \mathcal{M}_n^p est compact pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Par ailleurs, on peut généraliser la propriété de connexité de \mathcal{M}_1^p aux Multibrots multicomplexes \mathcal{M}_n^p .

Proposition 2.1.8

Soit $n, p \in \mathbb{N}^$ où $p \geq 2$. Le Multibrot \mathcal{M}_n^p est connexe.*

DÉMONSTRATION. La proposition se démontre par induction. Dans le cas où $n = 1$, il a été vérifié par Douady et Hubbard [10] ainsi que Beardon [3] que l'ensemble de Mandelbrot est connexe. Leurs démonstrations peuvent être adaptées au cas général où $p \geq 2$. En effet, dans le cas où $p = 2$, on établit dans [3, 10] l'existence d'une transformation conforme ψ , c'est-à-dire une bijection biholomorphe, allant de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^2$ à $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1}(0, 1)$. Ainsi, on déduit que $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^2$ est connexe, d'où \mathcal{M}_1^2 est simplement connexe (conséquence du théorème de l'application conforme, voir [14]). Comme on peut aussi

trouver une transformation conforme $\psi_p : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B_1}(0, 1)$ (elle est présentée en détails à la section 5.1), on en déduit que \mathcal{M}_1^p est simplement connexe dans pour tout entier $p \geq 2$.

Ensuite, en supposant que \mathcal{M}_{n-1}^p est connexe, on déduit immédiatement du lemme 2.1.6 que \mathcal{M}_n^p est aussi connexe puisque $\mathcal{M}_n^p = \mathcal{M}_{n-1}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{M}_{n-1}^p$ de la proposition 2.1.3. ■

2.2 Ensembles de Julia remplis

Les ensembles de Julia se définissent de manière semblable aux Multibrots. En fait, comme il sera possible de constater dans cette section, les deux types de fractales possèdent plusieurs propriétés analogues.

Considérons à nouveau le polynôme quadratique complexe $f_c(z) = z^2 + c$ où $c \in \mathbb{C}$. L'ensemble de Julia rempli standard \mathcal{K}_c associé au paramètre c peut être défini de la manière suivante :

$$\mathcal{K}_c = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \{f_c^m(z)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée} \right\}.$$

Remarque. On précise ici que \mathcal{K}_c est l'ensemble de Julia *rempli* associé à c car l'ensemble de Julia (non rempli) associé à c fait référence à la frontière de \mathcal{K}_c [24]. En effet, l'ensemble de Julia associé au polynôme f_c est $\mathcal{J}_c = \partial\mathcal{K}_c$. Cependant, dans le cadre de ce travail, seuls les ensembles de Julia remplis seront étudiés. Par conséquent, même si on considérera toujours les ensembles de Julia remplis, il ne sera pas toujours spécifié qu'ils sont remplis.

Un ensemble de Julia est donc obtenu par itération de polynôme, tout comme un Multibrot. Cependant, pour ce qui est du Multibrot, on posait toujours que $z = 0$. Ici, on cherche plutôt à déterminer quels nombres $z \in \mathbb{C}$ permettent d'obtenir une suite bornée. Celle-ci dépend du paramètre fixé $c \in \mathbb{C}$ et de la variable $z \in \mathbb{C}$:

$$f_c(z) = z^2 + c;$$

$$f_c^2(z) = (f_c(z))^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c;$$

$$f_c^3(z) = \left(f_c^2(z)\right)^2 + c = z^8 + 4cz^6 + 6c^2z^4 + 2cz^4 + 4c^3z^2 + 4c^2z^2 + c^4 + 2c^3 + c^2 + c;$$

⋮

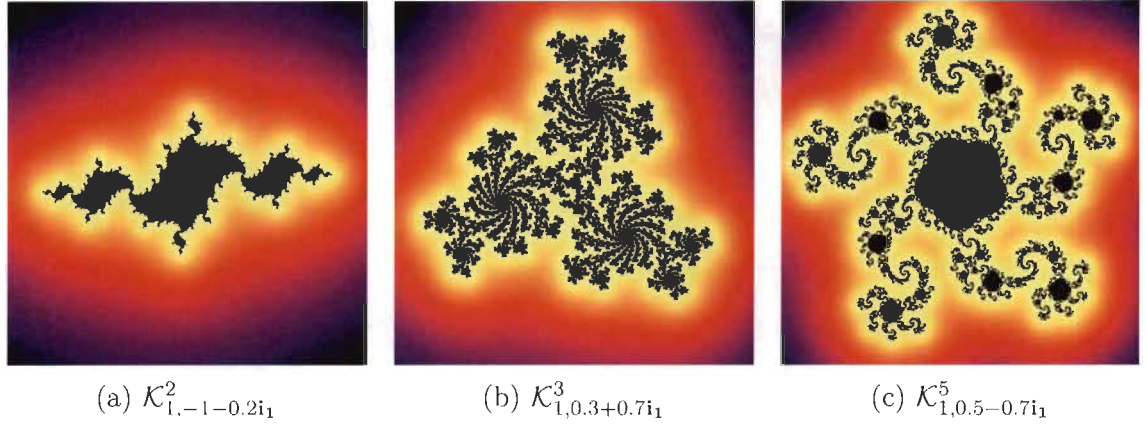


FIGURE 2.3 – Ensembles de Julia complexes

On voit donc que le processus itératif des ensembles de Julia requiert davantage de calculs que celui des Multibrots. les calculs deviennent lourds assez rapidement. Par conséquent, les propriétés des ensembles de Julia sont moins évidentes. Tout de même, l'ajout d'un paramètre c permet d'obtenir une multitude d'ensembles de Julia, ce qui amène un intérêt supplémentaire.

Tout comme on l'a fait à la section précédente pour l'ensemble de Mandelbrot, il est possible de généraliser les ensembles de Julia aux espaces multicomplexes. La définition suivante est obtenue en généralisant la définition des ensembles de Julia multicomplexes présentée par Garant-Pelletier et Rochon [13].

Définition 2.2.1 – Ensembles de Julia remplis

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{M}(n)$. Considérons aussi le polynôme $Q_{p,c} : \mathbb{M}(n) \rightarrow \mathbb{M}(n)$ tel que $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$. L'ensemble de Julia rempli n -complexe d'ordre p associé au paramètre c est l'ensemble

$$\mathcal{K}_{n,c}^p = \{\eta \in \mathbb{M}(n) \mid \{Q_{p,c}^m(\eta)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée}\}.$$

On généralise ainsi les ensembles de Julia en utilisant un polynôme à valeurs multicomplexes $Q_{p,c}$ de degré entier $p \geq 2$ quelconque. D'ailleurs, il est possible de déduire certaines propriétés des ensembles de Julia analogues à celles des Multibrots.

Proposition 2.2.2

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{M}(n)$. L'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{n,c}^p$ est égal au produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien

$$\mathcal{K}_{n,c}^p = \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p.$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer cette égalité d'ensembles, on doit vérifier que

$$\eta = \eta_{\gamma_n} \gamma_n + \eta_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n \in \mathcal{K}_{n,c}^p \Leftrightarrow (\eta_{\gamma_n}, \eta_{\bar{\gamma}_n}) \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p.$$

Du lemme 2.1.2, on sait que $Q_{p,c}^m(\eta) = Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\gamma_n + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\bar{\gamma}_n$. Aussi, par la proposition 1.5.4, on déduit que

$$\|Q_{p,c}^m(\eta)\|_n = \sqrt{\frac{\|Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\|_{n-1}^2 + \|Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\|_{n-1}^2}{2}}.$$

Par conséquent, on a que la suite $\{Q_{p,c}^m(\eta)\}_{m=1}^\infty$ est bornée ssi les suites $\{Q_{p,c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\}_{m=1}^\infty$ et $\{Q_{p,c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\}_{m=1}^\infty$ le sont aussi. Ainsi, par définition de $\mathcal{K}_{n,c}^p$, on conclut que $\eta \in \mathcal{K}_{n,c}^p$ ssi $\eta_{\gamma_n} \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p$. ■

Par ailleurs, on peut démontrer que tout ensemble de Julia est borné. Certains lemmes seront nécessaires pour y arriver.

Lemme 2.2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$. Si $X_1 \subseteq Y_1$ et $X_2 \subseteq Y_2$, alors

$$X_1 \times_{\gamma_n} X_2 \subseteq Y_1 \times_{\gamma_n} Y_2.$$

DÉMONSTRATION. Posons $\eta \in X_1 \times_{\gamma_n} X_2$. Alors, de la définition du produit $\mathbb{M}(n)$ -cartésien, on sait que $\eta = \eta_{\gamma_n} \gamma_n + \eta_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$ où $\eta_{\gamma_n} \in X_1$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in X_2$. Comme $X_1 \subseteq Y_1$ et $X_2 \subseteq Y_2$, on déduit que $\eta_{\gamma_n} \in Y_1$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in Y_2$, d'où $\eta \in Y_1 \times_{\gamma_n} Y_2$. ■

Lemme 2.2.4. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$ et considérons $r = \max\{|c|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $|Q_{p,c}^m(z)| > (1 + \varepsilon)^m |z|$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

DÉMONSTRATION. Pour arriver au résultat, on procède par induction sur m . Comme $|z^p| = |z^p + c - c| \leq |z^p + c| + |c|$, on calcule que

$$|Q_{p,c}(z)| = |z^p + c| \geq |z^p| - |c| > |z^p| - |z|$$

puisque $|z| > r \geq |c|$. Comme $|z^p| = |z|^p$, on déduit que

$$|Q_{p,c}(z)| > |z|^p - |z| = (|z|^{p-1} - 1) |z|$$

où $|z|^{p-1} - 1 > 1$ car $|z| > 2^{\frac{1}{p-1}}$. Posons donc $|z|^{p-1} - 1 = 1 + \varepsilon$. Pour $m = 1$, on en déduit que

$$|Q_{p,c}(z)| > (1 + \varepsilon) |z|.$$

Supposons maintenant que $|Q_{p,c}^{m-1}(z)| > (1 + \varepsilon)^{m-1} |z|$ et vérifions que la proposition est vraie pour m . On calcule que

$$\begin{aligned} |Q_{p,c}^m(z)| &= |Q_{p,c}(Q_{p,c}^{m-1}(z))|, \\ &> (1 + \varepsilon) |Q_{p,c}^{m-1}(z)|, \\ &> (1 + \varepsilon) (1 + \varepsilon)^{m-1} |z|, \\ &= (1 + \varepsilon)^m |z|. \end{aligned}$$

On conclut donc que le lemme est vrai par le principe d'induction. ■

Proposition 2.2.5

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{M}(n)$.

- i) Si $n = 1$, alors $\mathcal{K}_{1,c}^p \subseteq \overline{B_1}(0, r)$ où $r = \max\{|c|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$.
- ii) Si $n \geq 2$, alors $\mathcal{K}_{n,c}^p \subseteq \overline{B_n}(0, R)$ où

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} r_\gamma^2}{2^{n-1}}}$$

et $r_\gamma = \max\{|c_\gamma|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ pour tout $\gamma \in S_2(n)$.

DÉMONSTRATION.

- i) Pour vérifier que $\mathcal{K}_{1,c}^p \subseteq \overline{B_1}(0, r)$, on démontre la proposition contraposée, c'est-à-dire $z \notin \overline{B_1}(0, r) \Rightarrow z \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r$, du lemme 2.2.4, on sait qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $|Q_{p,c}^m(z)| > (1 + \varepsilon)^m |z|$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, lorsque $m \rightarrow \infty$, on voit que $|Q_{p,c}^m(z)| \rightarrow \infty$ puisque $(1 + \varepsilon)^m \rightarrow \infty$. Par conséquent, $z \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$.
- ii) Pour $n \geq 2$, on procède par induction. Si $n = 2$, on voit que $c = c_{\gamma_2} \gamma_2 + c_{\bar{\gamma}_2} \bar{\gamma}_2$ où $c_{\gamma_2}, c_{\bar{\gamma}_2} \in \mathbb{C}$. Ainsi, posons $r_{\gamma_2} = \max\{|c_{\gamma_2}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ et $r_{\bar{\gamma}_2} = \max\{|c_{\bar{\gamma}_2}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ et considérons $R = \sqrt{\frac{r_{\gamma_2}^2 + r_{\bar{\gamma}_2}^2}{2}}$. Du cas où $n = 1$, on sait que

$$\mathcal{K}_{1,c_{\gamma_2}}^p \subseteq \overline{B_1}(0, r_{\gamma_2}) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{1,c_{\bar{\gamma}_2}}^p \subseteq \overline{B_1}(0, r_{\bar{\gamma}_2}).$$

Aussi, de la proposition 2.2.2 et du lemme 2.2.3, on voit que

$$\mathcal{K}_{2,c}^p = \mathcal{K}_{1,c_{\gamma_2}}^p \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{1,c_{\bar{\gamma}_2}}^p \subseteq \overline{B_1}(0, r_{\gamma_2}) \times_{\gamma_2} \overline{B_1}(0, r_{\bar{\gamma}_2}).$$

Par définition d'un $\mathbb{M}(2)$ -disque, on a que $\overline{B_1}(0, r_{\gamma_2}) \times_{\gamma_2} \overline{B_1}(0, r_{\bar{\gamma}_2}) = \overline{D_2}(0, r_{\gamma_2}, r_{\bar{\gamma}_2})$.

Par conséquent, par la proposition 1.5.8, on déduit que

$$\mathcal{K}_{2,c}^p \subseteq \overline{D_2}(0, r_{\gamma_2}, r_{\bar{\gamma}_2}) \subseteq \overline{B_2}(0, R).$$

Maintenant, supposons que la proposition est vraie pour $n-1$ et démontrons qu'elle l'est aussi pour n . Pour $c \in \mathbb{M}(n)$, on note que

$$c = \sum_{\gamma \in S_2(n)} c_{\gamma} \gamma = \left(\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \right) \gamma_n + \left(\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma \right) \bar{\gamma}_n.$$

Autrement dit, $c = c_{\gamma_n} \gamma_n + c_{\bar{\gamma}_n} \bar{\gamma}_n$ où

$$c_{\gamma_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \quad \text{et} \quad c_{\bar{\gamma}_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma.$$

Ainsi, en posant que

$$R_1 = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \gamma_n}^2}{2^{n-2}}} \quad \text{et} \quad R_2 = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}^2}{2^{n-2}}},$$

où $r_{\gamma \cdot \gamma_n} = \max\{|c_{\gamma \cdot \gamma_n}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ et $r_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} = \max\{|c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ pour tout $\gamma \in S_2(n-1)$, on déduit par hypothèse d'induction que

$$\mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \subseteq \overline{B_{n-1}}(0, R_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p \subseteq \overline{B_{n-1}}(0, R_2).$$

De plus, de la proposition 2.2.2 et du lemme 2.2.3, on déduit que

$$\mathcal{K}_{n,c}^p = \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p \subseteq \overline{B_{n-1}}(0, R_1) \times_{\gamma_n} \overline{B_{n-1}}(0, R_2).$$

Rappelons que $\overline{B_{n-1}}(0, R_1) \times_{\gamma_n} \overline{B_{n-1}}(0, R_2) = \overline{D_n}(0, R_1, R_2)$ par définition d'un $\mathbb{M}(n)$ -disque. Ainsi, par la proposition 1.5.8, on trouve que

$$\mathcal{K}_{n,c}^p \subseteq \overline{D_n}(0, R_1, R_2) \subseteq \overline{B_n}(0, R)$$

où $R = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$. Finalement, on peut calculer que

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \gamma_n}^2}{2^{n-2}} + \frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}^2}{2^{n-2}} \right)}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \gamma_n}^2 + \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}^2 \right)}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{\gamma \in S_2(n)} r_{\gamma}^2 \right)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. ■

Corollaire 2.2.6

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ où $p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{M}(n)$.

- i) Si $n = 1$, alors $z \in \mathcal{K}_{1,c}^p \Leftrightarrow |Q_{p,c}^m(z)| \leq r$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ où $r = \max\{|c|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$.
- ii) Si $n \geq 2$, alors $\eta \in \mathcal{K}_{n,c}^p \Leftrightarrow \|Q_{p,c}^m(\eta)\|_n \leq R$ où

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} r_{\gamma}^2}{2^{n-1}}}$$

et $r_{\gamma} = \max\{|c_{\gamma}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ pour tout $\gamma \in S_2(n)$.

DÉMONSTRATION.

- \Leftarrow) Par définition des ensembles de Julia, si $\{Q_{p,c}^m(\eta)\}_{m=1}^\infty$ est bornée, alors $\eta \in \mathcal{K}_{n,c}^p$.
- \Rightarrow) i) Dans le cas où $n = 1$, démontrons la contraposée, c'est-à-dire que s'il existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|Q_{p,c}^{m_0}(z)| > r$, alors $z \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$. Posons donc $z \in \mathbb{C}$ et $z_0 = Q_{p,c}^{m_0}(z)$ où $|Q_{p,c}^{m_0}(z)| > r$. On sait de la proposition 2.2.5 que $z_0 \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$, d'où $Q_{p,c}^m(z_0) \rightarrow \infty$. Ainsi,

$$Q_{p,c}^{m+m_0}(z) = Q_{p,c}^m(Q_{p,c}^{m_0}(z)) = Q_{p,c}^m(z_0) \rightarrow \infty.$$

Par définition de $\mathcal{K}_{1,c}^p$, on a donc que $z \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$.

- ii) Dans le cas où $n \geq 2$, on utilise le principe d'induction. Pour $n = 2$, on sait que $c = c_{\gamma_2}\gamma_2 + c_{\bar{\gamma}_2} + \bar{\gamma}_2$. De plus, on sait que $\mathcal{K}_{2,c}^p = \mathcal{K}_{1,c_{\gamma_2}}^p \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{1,c_{\bar{\gamma}_2}}^p$ de la proposition 2.2.2. Alors, si $\eta \in \mathcal{K}_{2,c}^p$, on a nécessairement que $\eta_{\gamma_2} \in \mathcal{K}_{1,c_{\gamma_2}}^p$ et $\eta_{\bar{\gamma}_2} \in \mathcal{K}_{1,c_{\bar{\gamma}_2}}^p$. Du cas où $n = 1$, on sait que

$$|Q_{p,c_{\gamma_2}}^m(\eta_{\gamma_2})| \leq r_{\gamma_2} \quad \text{et} \quad |Q_{p,c_{\bar{\gamma}_2}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_2})| \leq r_{\bar{\gamma}_2}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ où $r_{\gamma_2} = \max\{|c_{\gamma_2}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ et $r_{\bar{\gamma}_2} = \max\{|c_{\bar{\gamma}_2}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$. Par ailleurs, du lemme 2.1.2, on sait que $Q_{p,c}^m(\eta) = Q_{p,c_{\gamma_2}}^m(\eta_{\gamma_2})\gamma_2 + Q_{p,c_{\bar{\gamma}_2}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_2})\bar{\gamma}_2$. En calculant la norme de $Q_{p,c}^m(\eta)$ sous sa forme idempotente, de la proposition 1.5.4, on trouve que

$$\|Q_{p,c}^m(\eta)\|_2 = \sqrt{\frac{|Q_{p,c_{\gamma_2}}^m(\eta_{\gamma_2})|^2 + |Q_{p,c_{\bar{\gamma}_2}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_2})|^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{r_{\gamma_2}^2 + r_{\bar{\gamma}_2}^2}{2}} = R$$

en posant $R = \sqrt{\frac{r_{\gamma_2}^2 + r_{\bar{\gamma}_2}^2}{2}}$, d'où le résultat lorsque $n = 2$.

Pour démontrer que la proposition est vraie pour n , on suppose qu'elle l'est pour $n - 1$ et on procède de manière semblable. Par la proposition 2.2.2, on sait que $\mathcal{K}_{n,c}^p = \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p$. Ainsi, si $\eta \in \mathcal{K}_{n,c}^p$, alors $\eta_{\gamma_n} \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p$. Comme

$$c_{\gamma_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \quad \text{et} \quad c_{\bar{\gamma}_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma,$$

en posant que

$$R_1 = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \gamma_n}^2}{2^{n-2}}} \quad \text{et} \quad R_2 = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} r_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}^2}{2^{n-2}}},$$

où $r_{\gamma \cdot \gamma_n} = \max\{|c_{\gamma \cdot \gamma_n}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ et $r_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} = \max\{|c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$, on déduit par hypothèse d'induction que

$$\|Q_{p, c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\|_{n-1} \leq R_1 \quad \text{et} \quad \|Q_{p, c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\|_{n-1} \leq R_2$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ainsi, en utilisant le lemme 2.1.2 et la proposition 1.5.4, on calcule que

$$\|Q_{p, c}^m(\eta)\|_n = \sqrt{\frac{\|Q_{p, c_{\gamma_n}}^m(\eta_{\gamma_n})\|_{n-1}^2 + \|Q_{p, c_{\bar{\gamma}_n}}^m(\eta_{\bar{\gamma}_n})\|_{n-1}^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}} = R,$$

ce qui vérifie la proposition. ■

De plus, tout comme les Multibrots, on peut voir que les ensembles de Julia sont des ensembles compacts.

Proposition 2.2.7

Soit $n, p \in \mathbb{N}^$ où $p \geq 2$ et considérons $c \in \mathbb{M}(n)$. L'ensemble $\mathcal{K}_{n, c}^p$ est compact.*

DÉMONSTRATION. Il a déjà été démontré par Milnor que $\mathcal{K}_{1, c}^p$ est compact [24]. De manière générale, on voit de la proposition 2.2.2 que $\mathcal{K}_{n, c}^p = \mathcal{K}_{n-1, c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1, c_{\bar{\gamma}_n}}^p$. Par conséquent, du lemme 2.1.6, comme $\mathcal{K}_{n-1, c_{\gamma_n}}^p$ et $\mathcal{K}_{n-1, c_{\bar{\gamma}_n}}^p$ sont compacts, $\mathcal{K}_{n, c}^p$ doit l'être aussi. Ainsi, par le principe d'induction, on déduit que $\mathcal{K}_{n, c}^p$ est compact pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Aussi, il est déjà connu que l'ensemble $\mathcal{K}_{1, c}^p$ est connexe si et seulement si 0 fait partie de l'ensemble. Cette propriété se généralise au cas multicomplexe.

Proposition 2.2.8

Soit $n, p \in \mathbb{N}^$ où $p \geq 2$ et considérons $c \in \mathbb{M}(n)$. Alors,*

$$\mathcal{K}_{n, c}^p \text{ est connexe} \Leftrightarrow 0 \in \mathcal{K}_{n, c}^p \Leftrightarrow c \in \mathcal{M}_n^p.$$

DÉMONSTRATION. La deuxième équivalence se trouve directement par définition des ensembles de Julia et des Multibrots. Pour ce qui est de la première, on procède par induction.

Pour $n = 1$, on sait de Milnor [24] que l'ensemble $\mathcal{K}_{1,c}^p$ est connexe ssi il contient les points critiques de $Q_{p,c}(z)$, c'est-à-dire les points $z \in \mathbb{C}$ tels que $Q'_{p,c}(z) = 0$. Comme $Q'_{p,c}(z) = pz^{p-1}$, le seul point critique de $Q_{p,c}(z)$ est 0, d'où le résultat.

De plus, comme $\mathcal{K}_{n,c}^p = \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1,c_{\overline{\gamma}_n}}^p$ par la proposition 2.2.2, on peut voir que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{n,c}^p \text{ est connexe} &\Leftrightarrow \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \text{ et } \mathcal{K}_{n-1,c_{\overline{\gamma}_n}}^p \text{ sont connexes} && \text{par le lemme 2.1.6,} \\
 &\Leftrightarrow 0 \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \text{ et } 0 \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\overline{\gamma}_n}}^p && \text{par hypothèse d'induction,} \\
 &\Leftrightarrow 0\gamma_n + 0\overline{\gamma}_n \in \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1,c_{\overline{\gamma}_n}}^p && \text{par définition de } \times_{\gamma_n}, \\
 &\Leftrightarrow 0 \in \mathcal{K}_{n,c}^p && \text{par la proposition 2.2.2. } \blacksquare
 \end{aligned}$$

Coupes fractales tridimensionnelles

Les fractales présentées au chapitre 2 sont des objets en 2^n dimensions. Ainsi, il n'est pas possible de les visualiser dans leur entièreté. C'est pourquoi on introduit dans ce chapitre le concept de coupes tridimensionnelles. Celles-ci permettent de générer diverses images des Multibrots et des ensembles de Julia généralisés. Cependant, plusieurs coupes sont identiques. En plus de définir les coupes tridimensionnelles, on établit donc une relation d'équivalence permettant d'identifier quelles coupes sont visuellement les mêmes.

3.1 Définitions

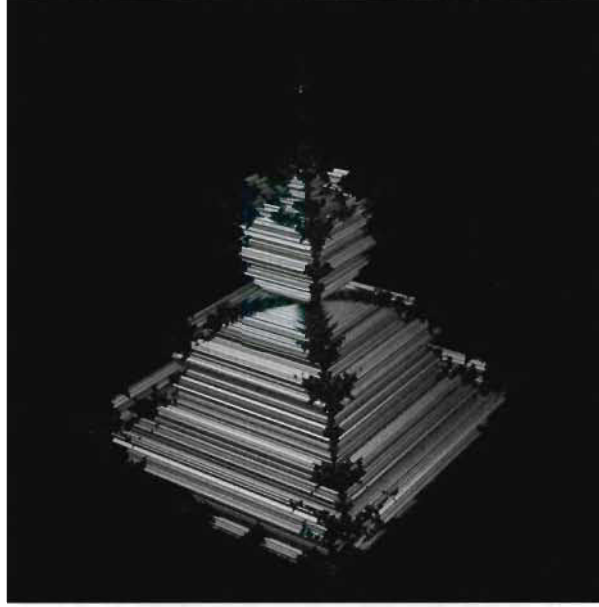
Tout d'abord, le concept central de cette section est celui de coupe tridimensionnelle principale. Pour le définir, la notation suivante s'avérera pratique.

Définition 3.1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. On note $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n)$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \}, \\ &= \{ c \in \mathbb{M}(n) \mid c = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m \text{ et } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Remarque. L'utilisation des caractères gras est pour rappeler que les unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m ne sont pas nécessairement des unités imaginaires de base de la forme i_m . Elles peuvent aussi être l'unité réelle 1 ou encore un produit d'unités imaginaires de la forme $i_{m_1} i_{m_2} \cdots i_{m_k}$.

FIGURE 3.1 – Le Tétrabrot $\mathcal{T}^2(1, i_1, i_2)$ **Définition 3.1.2 – Coupe tridimensionnelle principale**

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. La coupe tridimensionnelle principale de \mathcal{M}_n^p associée aux unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m est

$$\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \cap \mathcal{M}_n^p.$$

De même, pour $c \in \mathbb{M}(n)$, la coupe tridimensionnelle principale de $\mathcal{K}_{n,c}^p$ associée aux unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m est

$$\mathcal{F}_c^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \cap \mathcal{K}_{n,c}^p.$$

Remarque. Lorsqu'il n'y a aucune confusion possible, on écrit simplement \mathcal{T} ou \mathcal{F} .

Exemple 3.1.3. Considérons les trois unités $\mathbf{i}_k = 1$, $\mathbf{i}_l = i_1$ et $\mathbf{i}_m = i_2$ avec l'entier $p = 2$. La coupe $\mathcal{T}^2(1, i_1, i_2)$ de l'ensemble de Mandelbrot généralisé ainsi obtenue est le *Tétrabrot* [32, 33], présenté à la figure 3.1. ▲

On étudiera davantage les coupes principales des Multibrots que celles des ensembles de Julia. Plus de détails sur les coupes tridimensionnelles des ensembles de Julia sont présentés par Katunin [17, 18] et par Wang et Song [37].

De plus, on peut définir un autre type de coupe tridimensionnelle en utilisant la représentation idempotente des nombres multicomplexes. En effet, plutôt que d'utiliser des unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$, on peut obtenir une *coupe tridimensionnelle idempotente* en choisissant trois unités $\alpha, \beta, \delta \in S_2(n) \cup i_1 S_2(n)$. Par exemple, pour $n = 3$, on a que

$$S_2(3) \cup i_1 S_2(3) = \{\gamma_2 \gamma_3, \gamma_2 \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_2 \gamma_3, \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3, i_1 \gamma_2 \gamma_3, i_1 \gamma_2 \bar{\gamma}_3, i_1 \bar{\gamma}_2 \gamma_3, i_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3\}.$$

Définition 3.1.4 – Coupe tridimensionnelle idempotente de \mathcal{M}_n^p

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et considérons $\alpha, \beta, \delta \in S_2(n) \cup i_1 S_2(n)$, trois unités différentes. La *coupe tridimensionnelle idempotente* de \mathcal{M}_n^p associée aux unités α, β et δ est

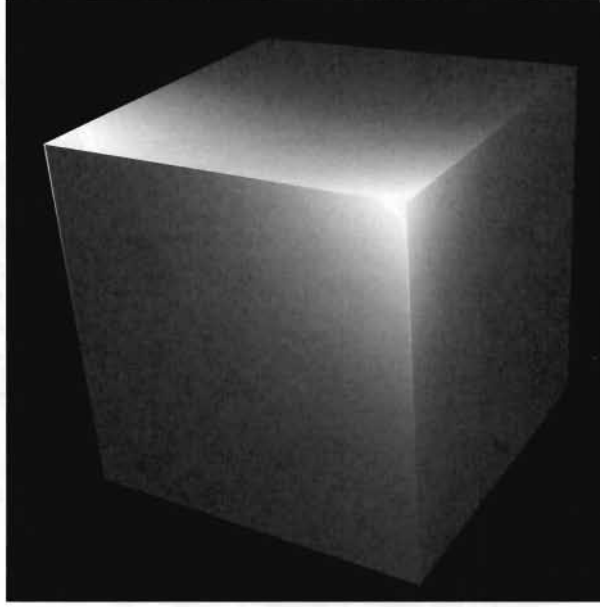
$$\mathcal{T}_e^p(\alpha, \beta, \delta) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{\alpha, \beta, \delta\} \cap \mathcal{M}_n^p.$$

Ainsi, les coupes principales et idempotentes sont définies de manière semblable : seules les unités choisies changent.

Exemple 3.1.5. Considérons les trois unités $\alpha = \gamma_2 \gamma_3$, $\beta = \bar{\gamma}_2 \gamma_3$ et $\delta = \gamma_2 \bar{\gamma}_3$ avec l'entier $p = 2$. La coupe $\mathcal{T}_e^2(\gamma_2 \gamma_3, \bar{\gamma}_2 \gamma_3, \gamma_2 \bar{\gamma}_3)$ correspond à l'*Earthbrot* [36], présenté à la figure 3.2. ▲

Dans ce mémoire, on étudie davantage les propriétés des coupes tridimensionnelles principales que celles des coupes idempotentes. Les coupes idempotentes sont définies ici simplement dans le but d'introduire ce concept particulièrement intéressant qui est intimement lié aux coupes principales. En effet, le concept est très similaire et permet d'obtenir des coupes tridimensionnelles remarquables. Par exemple, de la figure 3.2, on voit que l'*Earthbrot* correspond clairement à un cube. Pour en apprendre davantage sur les coupes idempotentes, il est conseillé de consulter le mémoire de Vallières [36].

Pour le reste de ce chapitre, on étudiera les coupes principales \mathcal{T} des Multibrots généralisés.

FIGURE 3.2 – L'Earthbrot $\mathcal{T}_e^2(\gamma_2\gamma_3, \bar{\gamma}_2\gamma_3, \gamma_2\bar{\gamma}_3)$

3.2 Équivalence entre les coupes principales \mathcal{T}

En générant diverses coupes tridimensionnelles par ordinateur, on réalise rapidement que plusieurs coupes sont similaires. Par exemple, le Tétrabrot $\mathcal{T}^2(1, i_1, i_2)$ est identique à la coupe $\mathcal{T}^2(1, i_1, i_3)$ à symétrie près. En définissant une relation d'équivalence entre les coupes, il est possible de les classer afin de trouver lesquelles sont visuellement les mêmes.

Avant de définir une relation entre les coupes, il est nécessaire d'introduire la notation suivante.

Définition 3.2.1 – Espace des itérées

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. L'espace

$$\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ Q_{p,c}^m(0) : c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}$$

est l'espace des itérées de $Q_{p,c}^m(0)$.

Plus intuitivement, on peut aussi dire que $\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est l'ensemble de toutes les

combinaisons linéaires d'itérées $Q_{p,c}^m(0)$ finies, où $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. Cet ensemble forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n)$ pouvant être égal à $\mathbb{M}(n)$ dans certains cas.

Les différents espaces d'itérées seront caractérisés plus explicitement à la proposition 4.1.7. Pour le moment, la définition précédente est suffisante pour établir une relation d'équivalence entre les coupes tridimensionnelles principales de \mathcal{M}_n^p .

Définition 3.2.2 – Relation entre deux coupes tridimensionnelles principales de \mathcal{M}_n^p

Soit deux coupes principales $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ de l'ensemble \mathcal{M}_n^p et considérons les espaces vectoriels $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Les coupes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 ont la même dynamique, noté $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, s'il existe un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et

$$(\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta) \quad \forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), \forall \eta \in M_2.$$

Une classe d'équivalence de la relation \sim est appelée une *dynamique tridimensionnelle* de \mathcal{M}_n^p .

Remarque. Notons que, dans la définition précédente, l'application φ doit être un isomorphisme d'espace vectoriel, c'est-à-dire qu'elle doit être bijective et linéaire.

Proposition 3.2.3

La relation \sim de la définition 3.2.2 est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION. On doit démontrer que \sim est réflexive, symétrique et transitive.

- i) Soit la coupe principale $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et l'ensemble $M = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. On peut facilement vérifier que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}$ en utilisant l'application identité $\varphi(\eta) = \eta$.
- ii) Soit les coupes principales $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et considérons les ensembles $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Si $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, alors on sait qu'il existe un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et, pour tout $c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$,

$$\varphi \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi^{-1} = Q_{p,\varphi(c_1)}. \quad (3.1)$$

Comme φ est bijectif, on sait que $\varphi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. De plus, posons $c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. En utilisant l'égalité 3.1 avec $c_1 = \varphi^{-1}(c_2)$, on trouve que

$$\varphi^{-1} \circ Q_{p,c_2} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \left(\varphi \circ Q_{p,\varphi^{-1}(c_2)} \circ \varphi^{-1} \right) \circ \varphi = Q_{p,\varphi^{-1}(c_2)}.$$

Ainsi, l'isomorphisme φ^{-1} permet de conclure que $\mathcal{T}_2 \sim \mathcal{T}_1$.

iii) Soit trois coupes principales $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et $\mathcal{T}_3^p(\mathbf{i}_t, \mathbf{i}_u, \mathbf{i}_v)$ telles que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_2 \sim \mathcal{T}_3$. Considérons aussi $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et $M_3 = \text{It}^p(\mathbf{i}_t, \mathbf{i}_u, \mathbf{i}_v)$. On sait qu'il existe des isomorphismes $\varphi_1 : M_1 \rightarrow M_2$ et $\varphi_2 : M_2 \rightarrow M_3$ respectant les hypothèses de la définition 3.2.2. Posons $\Phi : M_1 \rightarrow M_3$ telle que $\Phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. On voit alors que

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) &= \varphi_2(\varphi_1(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))), \\ &= \varphi_2(\mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)), \\ &= \mathbb{T}(\mathbf{i}_t, \mathbf{i}_u, \mathbf{i}_v). \end{aligned}$$

On a aussi que, pour tout $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$,

$$\begin{aligned} \Phi \circ Q_{p,c} \circ \Phi^{-1} &= (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ Q_{p,c} \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}), \\ &= \varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ Q_{p,c} \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_2^{-1}, \\ &= \varphi_2 \circ Q_{p,\varphi_1(c)} \circ \varphi_2^{-1}, \\ &= Q_{p,\varphi_2(\varphi_1(c))} = Q_{p,\Phi(c)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut conclure que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_3$. ■

Des relations d'équivalence similaires à celle définie en 3.2.2 ont été proposées dans d'autres ouvrages [13, 26, 29]. Par exemple, dans [13], on définit que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ s'il existe une application φ telle que $(\varphi \circ Q_{p,c} \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta)$, mais aucune hypothèse supplémentaire sur φ et η n'est spécifiée : la définition 3.2.2 se veut donc plus précise.

Par ailleurs, Parisé présente dans [26] une définition d'équivalence plus pointue que celle dans [13], mais qui diffère tout de même légèrement de la définition 3.2.2. En effet, considérons deux coupes $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. À la définition 3.2.2, pour que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, on demande que φ soit telle que

$$\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s).$$

La définition 3.8 dans [26] stipule plutôt que φ doit respecter l'énoncé suivant :

$$\forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s), \exists c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \text{ tel que } \varphi(c_1) = c_2.$$

On peut s'assurer que ces deux hypothèses sont équivalentes dans le contexte.

Lemme 3.2.4 (Corollaire 3.36 dans [23]). *Soit deux espaces vectoriels E_1 et E_2 tels que $\dim E_1 = \dim E_2 < \infty$. Pour toute application linéaire $L : E_1 \rightarrow E_2$,*

$$L \text{ est injective} \Leftrightarrow L \text{ est surjective} \Leftrightarrow L \text{ est bijective.}$$

DÉMONSTRATION. On présente ici un résumé de la preuve. Le résultat découle en grande partie du théorème du rang, qui stipule que

$$\dim E_1 = \dim K + \dim I$$

où $K := \{x \in E_1 \mid L(x) = 0\}$ est le *noyau* de L et $I := L(E_1)$ est l'*image* de L . De plus, pour arriver au résultat, on utilise les propriétés suivantes sur l'injectivité et la surjectivité d'applications linéaires définies sur des espaces de dimensions finies [23] :

i) On peut vérifier que L est injective $\Leftrightarrow K = \{0\} \Leftrightarrow \dim K = 0$. Par conséquent,

$$L \text{ est injective} \Leftrightarrow \dim K = 0. \quad (3.2)$$

ii) Puisque $\dim E_2 < \infty$, on pourrait démontrer que

$$L \text{ est surjective} \Leftrightarrow \dim I = \dim E_2. \quad (3.3)$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} L \text{ est injective} &\Leftrightarrow \dim K = 0 && \text{par l'équivalence 3.2,} \\ &\Leftrightarrow \dim E_1 = \dim I && \text{par le théorème du rang,} \\ &\Leftrightarrow \dim E_2 = \dim I && \text{de l'hypothèse } \dim E_1 = \dim E_2, \\ &\Leftrightarrow L \text{ est surjective} && \text{par l'équivalence 3.3.} \end{aligned}$$

De cette équivalence, on déduit ensuite aisément que L est surjective ssi L est bijective. ■

Proposition 3.2.5

Pour $n = 3$, la définition 3.2.2 est équivalente à la définition 3.8 dans [26].

Remarque. On spécifie que $n = 3$ car la définition 3.8 dans [26] ne s'applique que dans ce cas. Tout de même, les arguments utilisés dans la preuve demeurent valides lorsqu'on généralise la définition 3.8 au cas général où $n \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Rappelons la différence entre les deux définitions :

- (1) dans la définition 3.2.2, on pose que φ est telle que

$$\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s);$$

- (2) dans la définition de Parisé, on dit plutôt que

$$\forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s), \exists c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \text{ tel que } \varphi(c_1) = c_2. \quad (3.4)$$

Pour démontrer que les deux définitions sont équivalentes, il suffit donc de vérifier que (1) \Leftrightarrow (2). Posons donc $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et considérons un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$.

- \Rightarrow) Si $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, on a directement que, pour tout $c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, il existe un $c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ tel que $\varphi(c_1) = c_2$.
- \Leftarrow) Maintenant, supposons que pour tout $c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, il existe un $c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ tel que $\varphi(c_1) = c_2$. Comme φ est bijectif, on sait que φ^{-1} existe. On peut donc réécrire cet énoncé comme suit :

$$\varphi^{-1}(c_2) = c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \text{ pour tout } c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s).$$

Autrement dit, on a que $\varphi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)) \subseteq \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. De plus, on sait que l'application φ^{-1} restreinte au sous-domaine $\mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ est injective. Du lemme 3.2.4, on déduit que φ^{-1} forme donc nécessairement une bijection de $\mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ à $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ puisque $\dim \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s) = \dim \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = 3 < \infty$. Par conséquent, on conclut que $\varphi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, d'où $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. ■

Il existe une autre définition d'équivalence similaire à la définition 3.2.2 proposée par Rochon et Parisé dans [29] dans le cas où $n = 3$. Effectivement, dans cet article, on ne demande pas que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$: on stipule plutôt que l'équation 3.4 doit être respectée, comme dans la définition 3.8 de Parisé [26]. Aussi, en plus des hypothèses incluses dans la définition 3.2.2, φ doit nécessairement être définie sur tout l'espace $\mathbb{M}(n)$ et l'égalité

$$(\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta) \quad (3.5)$$

doit être vérifiée en tout point $\eta \in \mathbb{M}(n)$. Rappelons que la définition 3.2.2 demande seulement que φ soit définie sur l'espace des itérées $\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et que l'égalité précédente soit respectée sur ce domaine.

Lemme 3.2.6. *Soit $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et considérons un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$. Si l'égalité $(\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta)$ est vérifiée pour tout $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et pour tout $\eta \in M_2$, alors*

$$(\varphi \circ Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}^m(\eta) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Remarque. Le lemme reste valide lorsque $\varphi : \mathbb{M}(n) \rightarrow \mathbb{M}(n)$.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, on sait que l'égalité est vérifiée dans le cas où $m = 1$. On déduit donc que

$$(\varphi \circ Q_{p,c})(\zeta) = (Q_{p,\varphi(c)} \circ \varphi)(\zeta) \quad \forall \zeta \in M_1$$

en composant par φ de chaque côté de l'égalité. Maintenant, supposons que l'égalité est vérifiée pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors, on calcule que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Q_{p,c}^{m+1} \circ \varphi^{-1})(\eta) &= (\varphi \circ Q_{p,c} \circ Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(\eta), \\ &= (Q_{p,\varphi(c)} \circ \varphi \circ Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(\eta), \\ &= (Q_{p,\varphi(c)} \circ Q_{p,\varphi(c)}^m)(\eta), \\ &= Q_{p,\varphi(c)}^{m+1}(\eta). \end{aligned}$$

Par le principe d'induction, on obtient donc le résultat voulu. ■

Proposition 3.2.7

Soit deux coupes principales $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Si $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ au sens de la définition 4 dans [29], alors $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ au sens de la définition 3.2.2.

DÉMONSTRATION. Considérons deux coupes principales $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ de \mathcal{M}_n^p . Posons aussi les ensembles $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$.

Supposons que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ au sens de la définition 4 dans [29], c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{M}(n) \rightarrow \mathbb{M}(n)$ tel que l'équation 3.4 est respectée et

$$(\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta) \quad \forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), \forall \eta \in \mathbb{M}(n). \quad (3.6)$$

Comme cette égalité est vraie $\forall \eta \in \mathbb{M}(n)$, elle l'est en particulier $\forall \eta \in M_2$. De plus, par preuve de la proposition 3.2.5, on sait que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Il ne reste donc qu'à vérifier que $\varphi(M_1) = M_2$.

Du lemme 3.2.6, on a

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(\eta) &= Q_{p,\varphi(c)}^m(\eta) \quad \forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), \forall \eta \in \mathbb{M}(n), \\ \Leftrightarrow \varphi(Q_{p,c}^m(\eta)) &= Q_{p,\varphi(c)}^m(\varphi(\eta)) \quad \forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), \forall \eta \in \mathbb{M}(n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par définition de M_1 , on sait que tout $\zeta \in M_1$ peut être écrit comme une combinaison linéaire d'itérées, c'est-à-dire que

$$\zeta = \sum_{j=1}^J a_j Q_{p,c_j}^{m_j}(0) \quad \text{où } a_j \in \mathbb{R}.$$

Par la linéarité de φ et par l'équation 3.7, on trouve donc que

$$\varphi(\zeta) = \varphi\left(\sum_{j=1}^J a_j Q_{p,c_j}^{m_j}(0)\right) = \sum_{j=1}^J a_j \varphi(Q_{p,c_j}^{m_j}(0)) = \sum_{j=1}^J a_j Q_{p,\varphi(c_j)}^{m_j}(0).$$

Comme $\varphi(c_j) \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ pour tout $c_j \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on déduit que $\varphi(\zeta) \in M_2$ par définition de M_2 . Ainsi, on a $\varphi(M_1) \subseteq M_2$.

Pour montrer que $M_2 \subseteq \varphi(M_1)$, on doit s'assurer que tout $\xi \in M_2$ possède une préimage $\chi \in M_1$. Par définition de M_2 , on peut poser que ξ s'écrit sous la forme

$$\xi = \sum_{k=1}^K a_k Q_{p,c_k}^{m_k}(0) \in M_2$$

où $c_k \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ pour tout $k = 1, 2, \dots, K$. On vérifie aisément que

$$\chi = \sum_{k=1}^K a_k Q_{p,\varphi^{-1}(c_k)}^{m_k}(0) \in M_1$$

est tel que $\varphi(\chi) = \xi$. Par conséquent, $M_2 \subseteq \varphi(M_1)$.

Ainsi, $\varphi(M_1) = M_2$ et on en déduit que la fonction φ restreinte à M_1 forme une bijection de M_1 à M_2 , c'est-à-dire que la définition 4 dans [29] implique la définition 3.2.2. ■

Conjecture 3.2.8. *La réciproque de la proposition 3.2.7 est vraie. Autrement dit, deux coupes principales équivalentes au sens de la définition 3.2.2 le sont aussi au sens de la définition 4 dans [29].*

Pour démontrer cette conjecture, il faudrait prouver que s'il existe un isomorphisme φ entre $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ tel que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et $\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1} = Q_{p,\varphi(c)}$, alors on peut aussi définir un isomorphisme Φ sur tout l'espace $\mathbb{M}(n)$ ayant les mêmes propriétés. On peut vérifier que ce constat est vrai dans plusieurs cas. En effet, dans le cas tricomplexe par exemple, il semble toujours possible de généraliser $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ à $\Phi : \mathbb{TC} \rightarrow \mathbb{TC}$ en s'assurant que

$$\Phi(\mathbf{i}_a \mathbf{i}_b) = \Phi(\mathbf{i}_a) \Phi(\mathbf{i}_b) \quad \forall \mathbf{i}_a, \mathbf{i}_b \in \mathbb{I}(3).$$

On construit ainsi un isomorphisme d'algèbre sur \mathbb{TC} , c'est-à-dire que $\Phi(\eta\zeta) = \Phi(\eta)\Phi(\zeta)$ pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{TC}$. Par conséquent, il devient évident que $\Phi(\eta^p) = \Phi(\eta)^p$ et on en déduit que $\Phi \circ Q_{p,c} \circ \Phi^{-1} = Q_{p,\Phi(c)}$ sur tout l'espace \mathbb{TC} . Cependant, une preuve formelle de ce constat est difficile à établir.

Exemple 3.2.9. Soit $M_1 = \text{It}^2(1, i_1, i_2)$ et $M_2 = \text{It}^2(1, i_1, i_3)$. On démontrera à la proposition 4.1.7 que

$$M_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{1, i_1, i_2, i_1 i_2\} \quad \text{et} \quad M_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{1, i_1, i_3, i_1 i_3\}$$

Ainsi, on pourrait vérifier que la bijection $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ telle que

$$\varphi(x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + x_4 i_1 i_2) = x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_3 + x_4 i_1 i_3$$

est un isomorphisme tel que, pour tout $c \in \mathbb{T}(1, i_1, i_2)$ et tout $\eta \in M_1$,

$$\left(\varphi \circ Q_{2,c} \circ \varphi^{-1}\right)(\eta) = Q_{2,\varphi(c)}(\eta). \quad (3.8)$$

Pour étendre cet isomorphisme à tout le domaine \mathbb{TC} , posons $\Phi : \mathbb{TC} \rightarrow \mathbb{TC}$ tel que $\Phi(\eta) = \varphi(\eta)$ pour tout $\eta \in M_1$. Par la suite, il suffit de bien choisir les images $\Phi(i_3)$, $\Phi(i_1 i_3)$, $\Phi(i_2 i_3)$ et $\Phi(i_1 i_2 i_3)$.

Plusieurs choix sont possibles : on pourrait, par exemple, poser $\Phi(i_3) = i_2$ ou $\Phi(i_3) = i_1 i_2 i_3$ puisque $i_3^2 = i_2^2 = (i_1 i_2 i_3)^2 = -1$. Posons arbitrairement $\Phi(i_3) := i_2$.

Ensuite, on peut en déduire les autres images $\Phi(i_1i_3)$, $\Phi(i_2i_3)$ et $\Phi(i_1i_2i_3)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(i_1i_3) &:= \Phi(i_1)\Phi(i_3) = i_1i_2; \\ \Phi(i_2i_3) &:= \Phi(i_2)\Phi(i_3) = i_3i_2 = i_2i_3; \\ \Phi(i_1i_2i_3) &:= \Phi(i_1)\Phi(i_2)\Phi(i_3) = i_1i_3i_2 = i_1i_2i_3.\end{aligned}$$

Ainsi, on pourrait démontrer que l'isomorphisme $\Phi : \mathbb{TC} \rightarrow \mathbb{TC}$ tel que

$$\begin{aligned}\Phi(x_1 + x_2i_1 + x_3i_2 + x_4i_1i_2 + x_5i_3 + x_6i_1i_3 + x_7i_2i_3 + x_8i_1i_2i_3) \\ = x_1 + x_2i_1 + x_3i_3 + x_4i_1i_3 + x_5i_2 + x_6i_1i_2 + x_7i_2i_3 + x_8i_1i_2i_3.\end{aligned}$$

satisfait aussi l'égalité 3.8 pour tout $\eta \in \mathbb{M}(n)$ en vérifiant que $\Phi(\eta\zeta) = \Phi(\eta)\Phi(\zeta)$. \blacktriangle

3.3 Implication de la relation d'équivalence

La relation d'équivalence définie en 3.2.2 n'est pas très intuitive. Tout de même, elle possède un sens géométrique. En effet, lorsque deux coupes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont équivalentes selon la relation \sim , on peut démontrer que l'isomorphisme φ allant de M_1 à M_2 forme en fait une bijection de \mathcal{T}_1 à \mathcal{T}_2 .

Proposition 3.3.1

Soit deux coupes principales $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et considérons les ensembles $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Si $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, alors il existe un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $\varphi(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$.

Autrement dit, deux coupes équivalentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont obtenues l'une de l'autre par une transformation linéaire.

DÉMONSTRATION. Puisque $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, on sait qu'il existe un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et

$$(\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta) \quad \forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), \forall \eta \in M_2.$$

Par définition de \mathcal{T}_1 , on sait que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. De plus, pour tout $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on sait que $c = Q_{p,c}(0) \in M_1$. Par conséquent, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \subseteq M_1$: l'isomorphisme

φ est donc défini sur tout l'ensemble \mathcal{T}_1 . Par un raisonnement semblable, on déduit que $\mathcal{T}_2 \subseteq M_2$.

Aussi, comme φ est linéaire, on sait que $\|\varphi(\eta)\|_n \leq C\|\eta\|_n \forall \eta \in M_1$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}^*$. En effet, cette propriété est connue pour les applications linéaires sur \mathbb{R}^{2^n} et l'espace vectoriel normé $\mathbb{M}(n)$ est isométrique à \mathbb{R}^{2^n} . On en déduit donc qu'elle est vraie aussi sur $\mathbb{M}(n)$. De même, il existe une certaine constante $D \in \mathbb{R}^*$ telle que $\|\varphi^{-1}(\eta)\|_n \leq D\|\eta\|_n$ pour tout $\eta \in M_2$. Comme φ est une bijection, on peut dire de manière équivalente que $\|\eta\|_n \leq D\|\varphi(\eta)\|_n$ pour tout $\eta \in M_1$.

De plus, par la linéarité de φ^{-1} , on a nécessairement que $\varphi^{-1}(0) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|Q_{p,c}^m(0)\|_n &= \|(Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(0)\|_n && \text{car } 0 = \varphi^{-1}(0), \\ &\geq \frac{1}{C} \|(\varphi \circ Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(0)\|_n && \text{car } \|\eta\|_n \geq \frac{1}{C} \|\varphi(\eta)\|_n, \\ &= \frac{1}{C} \|Q_{p,\varphi(c)}^m(0)\|_n && \text{par le lemme 3.2.6.} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|Q_{p,\varphi(c)}^m(0)\|_n &= \|(\varphi \circ Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(0)\|_n && \text{par le lemme 3.2.6,} \\ &\geq \frac{1}{D} \|(Q_{p,c}^m \circ \varphi^{-1})(0)\|_n && \text{car } \|\varphi(\eta)\|_n \geq \frac{1}{D} \|\eta\|_n, \\ &= \frac{1}{D} \|Q_{p,c}^m(0)\|_n && \text{car } \varphi^{-1}(0) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant ces deux derniers résultats, on obtient donc que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}_1 &\Leftrightarrow \{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée,} \\ &\Leftrightarrow \{Q_{p,\varphi(c)}^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée,} \\ &\Leftrightarrow \varphi(c) \in \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

Comme $c \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \varphi(c) \in \mathcal{T}_2$, on conclut que φ forme une bijection entre les coupes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . ■

Géométriquement, ce dernier résultat signifie que deux coupes équivalentes selon la relation \sim telle que définie en 3.2.2 sont liées par une transformation linéaire, c'est-à-dire une composition de réflexions (ce qui inclut les rotations), de dilatations (ce qui inclut

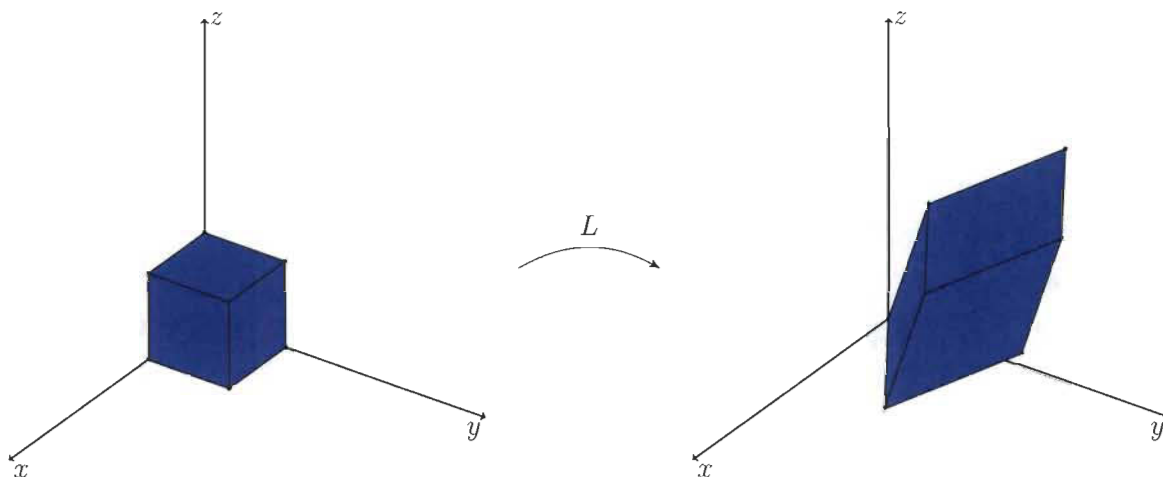


FIGURE 3.3 – Transformation linéaire $L(x, y, z) = \left(\frac{3x}{2} - y, x + y + \frac{z}{2}, \frac{y}{2} + \frac{3z}{2}\right)$ appliquée sur un cube unitaire

les homothéties) et de transvections [25]. Un exemple d'une telle transformation dans \mathbb{R}^3 est présenté à la figure 3.3.

Comme on peut le voir, la proposition 3.3.1 ne garantit pas que deux coupes équivalentes sont isométriques. Tout de même, c'est ce qu'on peut observer en pratique. Ce constat demeure cependant à démontrer.

Classification des coupes principales de \mathcal{M}_n^p

Dans ce chapitre, on présente les différentes classes d'équivalence de coupes principales \mathcal{T} . Pour ce faire, on étudie d'abord les espaces des itérées afin de leur trouver une base finie. Ainsi, ces espaces pourront être exprimés de manière moins abstraite qu'au chapitre précédent. Ensuite, il sera possible de définir des isomorphismes $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ entre les espaces M_1 et M_2 ayant des propriétés similaires afin d'établir les coupes qui sont équivalentes.

Ce chapitre aborde donc plus en détail les résultats de Brouillette et Rochon [5], qui sont essentiellement une généralisation de ce qui avait été trouvé par Parisé [26].

4.1 Explicitation des espaces des itérées

Afin de classer les coupes tridimensionnelles principales, les notations suivantes seront utiles.

Définition 4.1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. On définit

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \} .$$

Définition 4.1.2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. On définit

$$\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m\}.$$

Remarque. En particulier, on voit que $\mathbb{S}(i_1, i_2, i_3) = \mathbb{TC}$.

Lemme 4.1.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons trois unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$ différentes. Alors,*

- i) *le sous-espace $\mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est fermé sous la multiplication ;*
- ii) *le sous-espace $\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est aussi fermé sous la multiplication ;*
- iii) *si $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, alors $\eta^p \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ lorsque p est impair.*

DÉMONSTRATION. Les trois énoncés se démontrent par vérification algébrique.

- i) Considérons $\eta, \zeta \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ tels que

$$\eta = x_1 + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \quad \text{et} \quad \zeta = y_1 + y_2 \mathbf{i}_l + y_3 \mathbf{i}_m + y_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m.$$

On a que $\eta \cdot \zeta \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ puisque

$$\begin{aligned} \eta \cdot \zeta &= (x_1 + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m)(y_1 + y_2 \mathbf{i}_l + y_3 \mathbf{i}_m + y_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m), \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \mathbf{i}_l^2 + x_3 y_3 \mathbf{i}_m^2 + x_4 y_4 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 \\ &\quad + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 \mathbf{i}_m^2 + x_4 y_3 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_l \\ &\quad + (x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_4 \mathbf{i}_l^2 + x_4 y_2 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_m \\ &\quad + (x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_1 y_4 + x_4 y_1) \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m. \end{aligned}$$

- ii) Pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on trouve que $\eta \cdot \zeta \in \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ de manière similaire au cas précédent.
- iii) Pour le dernier énoncé, posons $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ tel que

$$\eta = x_1 \mathbf{i}_k + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m$$

et considérons $\mu \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\nu \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m)$ tels que

$$\mu = y_1 \mathbf{i}_k + y_2 \mathbf{i}_l + y_3 \mathbf{i}_m + y_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \quad \text{et} \quad \nu = w_1 + w_2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + w_3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + w_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m.$$

On voit que

$$\begin{aligned}\eta \cdot \mu &= x_1 y_1 \mathbf{i}_k^2 + x_2 y_2 \mathbf{i}_l^2 + x_3 y_3 \mathbf{i}_m^2 + x_4 y_4 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 \\ &\quad + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 \mathbf{i}_m^2 + x_4 y_3 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \\ &\quad + (x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_4 \mathbf{i}_l^2 + x_4 y_2 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \\ &\quad + (x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_1 y_4 \mathbf{i}_k^2 + x_4 y_1 \mathbf{i}_k^2) \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\eta \cdot \nu &= (x_1 w_1 + x_2 w_2 \mathbf{i}_l^2 + x_3 w_3 \mathbf{i}_m^2 + x_4 w_4 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_k \\ &\quad + (x_2 w_1 + x_1 w_2 \mathbf{i}_k^2 + x_3 w_4 \mathbf{i}_m^2 + x_4 w_3 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_l \\ &\quad + (x_3 w_1 + x_1 w_3 \mathbf{i}_k^2 + x_2 w_4 \mathbf{i}_l^2 + x_4 w_2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_m \\ &\quad + (x_4 w_1 + x_1 w_4 + x_2 w_3 + x_3 w_2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m.\end{aligned}$$

Autrement dit, $\eta \cdot \mu \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m)$ et $\eta \cdot \nu \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. À partir de ces deux arguments, on vérifie que

$$\eta^2 = \eta \cdot \eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m) \quad \text{et} \quad \eta^3 = \eta \cdot \eta^2 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m).$$

Par la suite, on peut vérifier par induction que $\eta^p \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ pour tout p impair de manière similaire. ■

Le prochain lemme permet d'établir les conditions nécessaires pour simplifier un nombre multicomplexe de l'espace $\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

Lemme 4.1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons trois unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$ différentes. Soit $\eta \in \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ tel que*

$$\eta = x_1 + x_2 \mathbf{i}_k + x_3 \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m + x_5 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + x_6 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_7 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m + x_8 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m.$$

Le nombre η peut être exprimé en fonction de moins de huit composantes réelles ssi $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$ ou une des unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ ou \mathbf{i}_m est 1.

DÉMONSTRATION. Pour que η puisse être exprimé en fonction de moins de huit composantes réelles, il faut qu'au moins une des unités parmi les huit soit égale à une autre unité (au signe près). Par exemple, il faudrait que l'unité associée à x_1 , qui est 1, soit équivalente à l'unité associée à une autre composante x_i . Pour ce cas particulier, en considérant toutes les unités x_i ou $i \neq 1$, on trouve les possibilités suivantes :

- i) $1 = \pm \mathbf{i}_k \Rightarrow 1 = \mathbf{i}_k$;
- ii) $1 = \pm \mathbf{i}_l \Rightarrow 1 = \mathbf{i}_l$;
- iii) $1 = \pm \mathbf{i}_m \Rightarrow 1 = \mathbf{i}_m$;
- iv) $1 = \pm \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \Rightarrow \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_l$;
- v) $1 = \pm \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \Rightarrow \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_m$;
- vi) $1 = \pm \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \Rightarrow \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_m$;
- vii) $1 = \pm \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \Rightarrow \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$ ou $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_l$ ou $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_m$.

Remarquons que les cas iv), v) et vi) ne peuvent être considérés car les unités sont toutes distinctes par hypothèse. Ainsi, en supposant que l'unité associée à x_1 est équivalente à une autre unité, on trouve qu'une des unités doit être 1 ou qu'une des unités doit être le produit des deux autres. De plus,

$$\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k \Leftrightarrow \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_l \Leftrightarrow \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_m,$$

c'est-à-dire que si une unité peut être exprimée en fonction des deux autres, alors c'est le cas pour les trois unités. Par conséquent, dans ce cas, on trouve que $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$ ou une des unités \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l ou \mathbf{i}_m est 1.

Si on suppose que l'unité associée à x_i , où $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, est équivalente à une autre unité, on arrive aux mêmes conclusions que précédemment. En vérifiant tous les cas possibles, on obtient donc le résultat voulu. ■

Remarque. Pour le reste du travail, si une des unités \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l ou \mathbf{i}_m est 1, alors on considérera que $\mathbf{i}_k = 1$ sans perte de généralité.

On voit donc du dernier lemme qu'un nombre $\eta \in \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ peut seulement être simplifié lorsque certaines conditions sont vérifiées. Ce constat permet de trouver plusieurs résultats en considérant séparément le cas où η est simplifiable et le cas où η ne l'est pas.

Lemme 4.1.5. *Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. Soit $M = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.*

- i) *Si p est pair et que $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, alors $\dim M \geq 4$.*
- ii) *Si p est pair mais que $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, alors $\dim M \geq 8$.*
- iii) *Si p est impair, alors $\dim M \geq 4$.*

DÉMONSTRATION. Soit l'espace vectoriel $M = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. En résumé, dépendant du cas à prouver, il suffit de trouver quatre ou huit vecteurs linéairement indépendants dans M : ici, les vecteurs sont des valeurs de la forme $Q_{p,c}^m(0)$.

Dans tous les cas, les trois valeurs $Q_{p,\mathbf{i}_k}(0) = \mathbf{i}_k$, $Q_{p,\mathbf{i}_l}(0) = \mathbf{i}_l$ et $Q_{p,\mathbf{i}_m}(0) = \mathbf{i}_m$ sont des vecteurs de M linéairement indépendants. Par la suite, chacun des cas doit être considéré séparément.

- i) Supposons d'abord que p est pair et que $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m = \pm\mathbf{i}_k$. Considérons $c_1 = a_1\mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m$ où $a_1 \in \mathbb{R}^*$. On peut trouver au moins une valeur $a_1 \in \mathbb{R}^*$ telle que $(a_1\mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m)^p = x_{11} + x_{12}\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m$ avec des valeurs $x_{11}, x_{12} \in \mathbb{R}^*$ non nulles. En effet, en développant l'expression $(a_1\mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m)^p$ à l'aide du théorème binomial, on obtient

$$\begin{aligned} (a_1\mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m)^p &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a_1^j \mathbf{i}_l^j \mathbf{i}_m^{p-j}, \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}} \binom{p}{2j} a_1^{2j} \mathbf{i}_l^{2j} \mathbf{i}_m^{p-2j} + \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} \binom{p}{2j+1} a_1^{2j+1} \mathbf{i}_l^{2j+1} \mathbf{i}_m^{p-2j-1}, \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}} \binom{p}{2j} a_1^{2j} (\mathbf{i}_l^2)^j (\mathbf{i}_m^2)^{\frac{p}{2}-j} + \mathbf{i}_l\mathbf{i}_m \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} \binom{p}{2j+1} a_1^{2j+1} (\mathbf{i}_l^2)^j (\mathbf{i}_m^2)^{\frac{p}{2}-j-1}. \end{aligned}$$

Ces deux dernières sommes sont en fait des polynômes réels en a_1 de degrés p et $p-1$ respectivement. Ainsi, il existe au plus $2p-1$ valeurs réelles a_1 telles qu'un de ces polynômes est nul. Par conséquent, il existe une infinité de valeurs a_1 telles que ces deux sommes sont non nulles.

Posons donc $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que $c_1^p = (a_1\mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m)^p = x_{11} + x_{12}\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m$ où $x_{11}, x_{12} \in \mathbb{R}^*$ sont non nulles. On obtient donc que

$$Q_{p,c_1}^2(0) = c_1^p + c_1 = x_{11} + a_1\mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m + x_{12}\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m.$$

Comme les quatre vecteurs $Q_{p,\mathbf{i}_k}(0)$, $Q_{p,\mathbf{i}_l}(0)$, $Q_{p,\mathbf{i}_m}(0)$ et $Q_{p,c_1}^2(0)$ sont linéairement indépendants, on déduit que $\dim M \geq 4$.

- ii) Supposons maintenant que p est pair mais que $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m \neq \pm\mathbf{i}_k$. Considérons la même constante c_1 ainsi que les deux nouvelles constantes $c_2 = a_2\mathbf{i}_k + \mathbf{i}_l$ et $c_3 = a_3\mathbf{i}_k + \mathbf{i}_m$ telles que $c_2^p = x_{21} + x_{22}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$ et $c_3^p = x_{31} + x_{32}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m$ où les composantes $x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \in \mathbb{R}^*$ sont non nulles. Ces constantes existent par un raisonnement

semblable au cas précédent. On a donc que

$$\begin{aligned} Q_{p,\mathbf{i}_k}^2(0) &= \pm 1 + \mathbf{i}_k, \\ Q_{p,c_1}^2(0) &= x_{11} + a_1 \mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m + x_{12} \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m, \\ Q_{p,c_2}^2(0) &= x_{21} + a_2 \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_l + x_{22} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l, \\ Q_{p,c_3}^2(0) &= x_{31} + a_3 \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_m + x_{32} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m. \end{aligned}$$

De plus, posons $c_0 = \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m$. On peut calculer que

$$Q_{p,c_0}^3(0) = y_1 + y_2 \mathbf{i}_k + y_3 \mathbf{i}_l + y_4 \mathbf{i}_m + y_5 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + y_6 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + y_7 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m + y_8 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m$$

où $y_j \in \mathbb{R}$ et $y_8 \neq 0$. Par conséquent, considérant ces cinq derniers vecteurs ainsi que les trois vecteurs $Q_{p,\mathbf{i}_k}(0)$, $Q_{p,\mathbf{i}_l}(0)$ et $Q_{p,\mathbf{i}_m}(0)$, on voit qu'on peut trouver au moins huit vecteurs linéairement indépendants dans M , c'est-à-dire que $\dim M \geq 8$.

iii) Finalement, supposons que p est impair. En utilisant de nouveau $c_0 = \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_l + \mathbf{i}_m$, on peut calculer que

$$Q_{p,c_0}^2 = u_1 \mathbf{i}_k + u_2 \mathbf{i}_l + u_3 \mathbf{i}_m + u_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m$$

où $u_j \in \mathbb{R}$ et $u_4 \neq 0$. En considérant cette itérée ainsi que $Q_{p,\mathbf{i}_k}(0)$, $Q_{p,\mathbf{i}_l}(0)$ et $Q_{p,\mathbf{i}_m}(0)$, on voit que $\dim M \geq 4$. ■

De ces derniers résultats, il est possible de trouver une base de l'espace $\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, et ce, peu importe les hypothèses posées sur l'exposant p et sur les unités \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m . Pour ce faire, la notion suivante d'algèbre linéaire sera utile.

Lemme 4.1.6 (Théorème 4.17 dans [20]). *Soit deux espaces vectoriels E_1 et E_2 de dimensions finies. Si $E_1 \subseteq E_2$, on a $\dim E_1 \leq \dim E_2$. En particulier, si $\dim E_1 = \dim E_2$, alors $E_1 = E_2$.*

Proposition 4.1.7

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et considérons trois unités différentes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$. Considérons l'ensemble $M = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. Alors,

- i) *si p est pair et que $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, alors $M = \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$;*
- ii) *si p est pair mais que $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, alors $M = \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$;*
- iii) *si p est impair, alors $M = \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.*

DÉMONSTRATION. Posons $M = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

- i) Supposons d'abord que p est pair. Alors, dans le cas où $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, on peut démontrer que $Q_{p,c}^m(0) \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \forall m \in \mathbb{N}$ et $\forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. En effet, on vérifie facilement que

$$Q_{p,c}(0) = c = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m = \begin{cases} c_1 + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m & \text{si } \mathbf{i}_k = 1, \\ c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m \pm c_1 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m & \text{si } \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k, \end{cases}$$

c'est-à-dire que $Q_{p,c}(0) \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. Ensuite, supposons que $Q_{p,c}^m(0) \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On sait du lemme 4.1.3 que $\mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est fermé sous la multiplication et l'addition. Comme $Q_{p,c}^{m+1}(0) = (Q_{p,c}^m(0))^p + c$, on en déduit que $Q_{p,c}^{m+1}(0) \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. On conclut ainsi que $Q_{p,c}^m(0) \in \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \forall m \in \mathbb{N}$ par le principe d'induction, d'où $M \subseteq \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

De plus, on sait du lemme 4.1.5 que $\dim M \geq 4$. Aussi, comme $M \subseteq \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on sait du lemme 4.1.6 que $\dim M \leq \dim(\mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = 4$. Ainsi, on trouve que $\dim M = 4 = \dim(\mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$. Comme $M \subseteq \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on en déduit du lemme 4.1.6 que $M = \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

- ii) Supposons maintenant que p est pair mais que $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$. On voit facilement que $Q_{p,c}(0) \in \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. Ensuite, de manière semblable au cas précédent, on peut démontrer que $Q_{p,c}^m(0) \in \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \forall m \in \mathbb{N}$ par induction puisque $\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est fermé sous l'addition et la multiplication selon le lemme 4.1.3. Ainsi, $M \subseteq \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

Par conséquent, on déduit que $\dim M \leq \dim(\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$. Du lemme 4.1.5, on sait que $\dim M \geq 8 = \dim(\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$ et donc $\dim M = \dim(\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$. Sachant que $M \subseteq \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\dim M = \dim(\mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$, on peut conclure que $M = \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

- iii) Finalement, supposons que p est impair. On sait que $Q_{p,c}(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. De plus, on a du lemme 4.1.3 que $\eta^p \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ lorsque $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est fermé sous l'addition. Ainsi, on peut vérifier que $Q_{p,c}^m(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où $M \subseteq \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

On déduit donc que $\dim M \leq \dim(\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$. Du lemme 4.1.5, on sait aussi que $\dim M \geq 4 = \dim(\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$, d'où $\dim M = \dim(\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$. Étant donné que $M \subseteq \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\dim M = \dim(\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m))$, on conclut que $M = \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. ■

Ce théorème permet donc de voir que l'espace $\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ est engendré par seulement quelques unités qui dépendent de \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m . Bref, pour trouver la base de $\text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, il suffit essentiellement de vérifier si p est impair et, dans le cas contraire, si une des trois unités est 1 ou si une unité peut être exprimée en fonction des deux autres.

4.2 Classes d'équivalence des coupes principales \mathcal{T}

Les coupes tridimensionnelles principales des Multibrots tricomplexes \mathcal{M}_3^2 et \mathcal{M}_3^3 ont déjà été classées par Parisé [26]. Il est possible de généraliser cette classification aux Multibrots multicomplexes.

Proposition 4.2.1

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 2$ et $p \in \{2, 3\}$ et considérons $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s \in \mathbb{I}(n)$ telles que $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m sont différentes deux à deux et $\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r$ et \mathbf{i}_s le sont aussi.

De plus, posons comme hypothèse que $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_q^2$, $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$ et

- i) si $p = 2$ et $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, on pose alors comme hypothèse que $\mathbf{i}_q = 1$ ou $\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s = \pm \mathbf{i}_q$ selon le cas ;
- ii) si $p = 2$ mais $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, on pose que $\mathbf{i}_q \neq 1$ et $\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \neq \pm \mathbf{i}_q$;
- iii) si $p = 3$, on ne pose aucune hypothèse supplémentaire.

Dans chacun des cas précédents, on a que $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$.

DÉMONSTRATION. Cette démonstration est principalement inspirée de preuves présentées par Garant-Pelletier et Rochon [13] ainsi que Parisé [26].

Soit $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Pour démontrer que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, on considère séparément chacun des cas i), ii) et iii).

i) D'abord, considérons le cas où $p = 2$ en posant l'hypothèse que $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$. De la proposition 4.1.7, on sait que $M_1 = \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

a) Si $\mathbf{i}_k = 1$, considérons des unités $\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s \in \mathbb{I}(n)$ telles que $\mathbf{i}_q = 1$, $\mathbf{i}_r^2 = \mathbf{i}_l^2$ et $\mathbf{i}_s^2 = \mathbf{i}_m^2$. Ainsi, par la proposition 4.1.7, on sait que $M_2 = \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Par conséquent, considérons la bijection linéaire $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ telle que

$$\varphi(x_1 + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m) = \varphi(x_1 + x_2 \mathbf{i}_r + x_3 \mathbf{i}_s + x_4 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s).$$

On remarque que $\varphi(c) \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ pour tout $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_l + c_3\mathbf{i}_m \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. De plus, pour tout $\eta = x_1 + x_2\mathbf{i}_r + x_3\mathbf{i}_s + x_4\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s \in M_2$, comme $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$, on peut calculer que

$$\begin{aligned} Q_{2,c}(\varphi^{-1}(\eta)) &= (x_1 + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m + x_4\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m)^2 + c_1 + c_2\mathbf{i}_l + c_3\mathbf{i}_m, \\ &= (x_1^2 + x_2^2\mathbf{i}_l^2 + x_3^2\mathbf{i}_m^2 + x_4^2\mathbf{i}_l^2\mathbf{i}_m^2 + c_1) \\ &\quad + (2x_1x_2 + 2x_3x_4\mathbf{i}_m^2 + c_2)\mathbf{i}_l \\ &\quad + (2x_1x_3 + 2x_2x_4\mathbf{i}_l^2 + c_3)\mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m, \\ &= (x_1^2 + x_2^2\mathbf{i}_r^2 + x_3^2\mathbf{i}_s^2 + x_4^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + c_1) \\ &\quad + (2x_1x_2 + 2x_3x_4\mathbf{i}_s^2 + c_2)\mathbf{i}_l \\ &\quad + (2x_1x_3 + 2x_2x_4\mathbf{i}_r^2 + c_3)\mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m. \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve que

$$\begin{aligned} Q_{2,\varphi(c)}(\eta) &= (x_1 + x_2\mathbf{i}_r + x_3\mathbf{i}_s + x_4\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s)^2 + c_1 + c_2\mathbf{i}_r + c_3\mathbf{i}_s, \\ &= (x_1^2 + x_2^2\mathbf{i}_r^2 + x_3^2\mathbf{i}_s^2 + x_4^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + c_1) \\ &\quad + (2x_1x_2 + 2x_3x_4\mathbf{i}_s^2 + c_2)\mathbf{i}_r \\ &\quad + (2x_1x_3 + 2x_2x_4\mathbf{i}_r^2 + c_3)\mathbf{i}_s \\ &\quad + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et tout $\eta \in M_2$, on a que

$$(\varphi \circ Q_{2,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = \varphi(Q_{2,c}(\varphi^{-1}(\eta))) = Q_{2,\varphi(c)}(\eta).$$

Par définition de la relation \sim , on conclut donc que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$.

- b) Lorsque $\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m = \pm\mathbf{i}_k$, en plus des hypothèses $\mathbf{i}_q^2 = \mathbf{i}_k^2$, $\mathbf{i}_r^2 = \mathbf{i}_l^2$ et $\mathbf{i}_s^2 = \mathbf{i}_m^2$, on pose que $\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s = \pm\mathbf{i}_q$. Ainsi, on a que $M_2 = \mathbb{M}(1, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et on peut considérer la même application $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ telle que

$$\varphi(x_1 + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m + x_4\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m) = \varphi(x_1 + x_2\mathbf{i}_r + x_3\mathbf{i}_s + x_4\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s).$$

Ensuite, on peut démontrer de manière semblable au cas précédent que

$$(\varphi \circ Q_{2,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{2,\varphi(c)}(\eta),$$

d'où $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$.

ii) Dans le cas où $p = 2$ mais $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, on sait de la proposition 4.1.7 que $M_1 = \mathbb{S}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. En posant que $\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \neq \pm \mathbf{i}_q$, on a aussi que $M_2 = \mathbb{S}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Par conséquent, on peut définir une bijection linéaire $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ en posant

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1 + x_2 \mathbf{i}_k + x_3 \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m + x_5 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + x_6 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_7 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m + x_8 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m) \\ &= x_1 + x_2 \mathbf{i}_q + x_3 \mathbf{i}_r + x_4 \mathbf{i}_s + x_5 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r + x_6 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s + x_7 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s + x_8 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $c = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on voit que $\varphi(c) \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Ainsi, en posant

$$\eta = x_1 + x_2 \mathbf{i}_q + x_3 \mathbf{i}_r + x_4 \mathbf{i}_s + x_5 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r + x_6 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s + x_7 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s + x_8 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \in M_2,$$

comme $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_q^2$, $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$, on peut calculer que

$$\begin{aligned} Q_{2,c}(\varphi^{-1}(\eta)) &= \left(x_1 + x_2 \mathbf{i}_k + x_3 \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m + x_5 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \right. \\ &\quad \left. + x_6 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_7 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m + x_8 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \right)^2 + c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m, \\ &= (x_1^2 + x_2^2 \mathbf{i}_k^2 + x_3^2 \mathbf{i}_l^2 + x_4^2 \mathbf{i}_m^2 \\ &\quad + x_5^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 + x_6^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_m^2 + x_7^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 + x_8^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) \\ &\quad + (2x_1 x_2 + 2x_3 x_5 \mathbf{i}_l^2 + 2x_4 x_6 \mathbf{i}_m^2 + 2x_7 x_8 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 + c_1) \mathbf{i}_k \\ &\quad + (2x_1 x_3 + 2x_2 x_5 \mathbf{i}_k^2 + 2x_4 x_7 \mathbf{i}_m^2 + 2x_6 x_8 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_m^2 + c_2) \mathbf{i}_l \\ &\quad + (2x_1 x_4 + 2x_2 x_6 \mathbf{i}_k^2 + 2x_3 x_7 \mathbf{i}_l^2 + 2x_5 x_8 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 + c_3) \mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1 x_5 + 2x_2 x_3 + 2x_4 x_8 \mathbf{i}_m^2 + 2x_6 x_7 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \\ &\quad + (2x_1 x_6 + 2x_2 x_4 + 2x_3 x_8 \mathbf{i}_l^2 + 2x_5 x_7 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1 x_7 + 2x_3 x_4 + 2x_2 x_8 \mathbf{i}_k^2 + 2x_5 x_6 \mathbf{i}_k^2) \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1 x_8 + 2x_2 x_7 + 2x_3 x_6 + 2x_4 x_5) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m, \\ &= (x_1^2 + x_2^2 \mathbf{i}_q^2 + x_3^2 \mathbf{i}_r^2 + x_4^2 \mathbf{i}_s^2 \\ &\quad + x_5^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 + x_6^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_s^2 + x_7^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + x_8^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) \\ &\quad + (2x_1 x_2 + 2x_3 x_5 \mathbf{i}_r^2 + 2x_4 x_6 \mathbf{i}_s^2 + 2x_7 x_8 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + c_1) \mathbf{i}_k \\ &\quad + (2x_1 x_3 + 2x_2 x_5 \mathbf{i}_q^2 + 2x_4 x_7 \mathbf{i}_s^2 + 2x_6 x_8 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_s^2 + c_2) \mathbf{i}_l \\ &\quad + (2x_1 x_4 + 2x_2 x_6 \mathbf{i}_q^2 + 2x_3 x_7 \mathbf{i}_r^2 + 2x_5 x_8 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 + c_3) \mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1 x_5 + 2x_2 x_3 + 2x_4 x_8 \mathbf{i}_s^2 + 2x_6 x_7 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \\ &\quad + (2x_1 x_6 + 2x_2 x_4 + 2x_3 x_8 \mathbf{i}_r^2 + 2x_5 x_7 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1 x_7 + 2x_3 x_4 + 2x_2 x_8 \mathbf{i}_q^2 + 2x_5 x_6 \mathbf{i}_q^2) \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \\ &\quad + (2x_1 x_8 + 2x_2 x_7 + 2x_3 x_6 + 2x_4 x_5) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m. \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve que

$$\begin{aligned}
Q_{2,\varphi(c)}(\eta) &= \left(x_1 + x_2 \mathbf{i}_q + x_3 \mathbf{i}_r + x_4 \mathbf{i}_s + x_5 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \right. \\
&\quad \left. + x_6 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s + x_7 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s + x_8 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \right)^2 + c_1 \mathbf{i}_q + c_2 \mathbf{i}_r + c_3 \mathbf{i}_s, \\
&= (x_1^2 + x_2^2 \mathbf{i}_q^2 + x_3^2 \mathbf{i}_r^2 + x_4^2 \mathbf{i}_s^2 \\
&\quad + x_5^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 + x_6^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_s^2 + x_7^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + x_8^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) \\
&\quad + (2x_1 x_2 + 2x_3 x_5 \mathbf{i}_r^2 + 2x_4 x_6 \mathbf{i}_s^2 + 2x_7 x_8 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + c_1) \mathbf{i}_q \\
&\quad + (2x_1 x_3 + 2x_2 x_5 \mathbf{i}_q^2 + 2x_4 x_7 \mathbf{i}_s^2 + 2x_6 x_8 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_s^2 + c_2) \mathbf{i}_r \\
&\quad + (2x_1 x_4 + 2x_2 x_6 \mathbf{i}_q^2 + 2x_3 x_7 \mathbf{i}_r^2 + 2x_5 x_8 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 + c_3) \mathbf{i}_s \\
&\quad + (2x_1 x_5 + 2x_2 x_3 + 2x_4 x_8 \mathbf{i}_s^2 + 2x_6 x_7 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \\
&\quad + (2x_1 x_6 + 2x_2 x_4 + 2x_3 x_8 \mathbf{i}_r^2 + 2x_5 x_7 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s \\
&\quad + (2x_1 x_7 + 2x_3 x_4 + 2x_2 x_8 \mathbf{i}_q^2 + 2x_5 x_6 \mathbf{i}_q^2) \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \\
&\quad + (2x_1 x_8 + 2x_2 x_7 + 2x_3 x_6 + 2x_4 x_5) \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s.
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que, pour tout $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et tout $\eta \in M_2$, on a que

$$(\varphi \circ Q_{2,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = \varphi(Q_{2,c}(\varphi^{-1}(\eta))) = Q_{2,\varphi(c)}(\eta),$$

c'est-à-dire que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$.

iii) Finalement, considérons le cas où $p = 3$. De la proposition 4.1.7, on sait que M_1 et M_2 sont tels que $M_1 = \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \mathbb{M}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. Ainsi, considérons la bijection linéaire $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ telle que

$$\varphi(x_1 \mathbf{i}_k + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m) = x_1 \mathbf{i}_q + x_2 \mathbf{i}_r + x_3 \mathbf{i}_s + x_4 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s.$$

Il est évident que $\varphi(c) \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ pour tout $c = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

De plus, en posant $\eta = x_1 \mathbf{i}_q + x_2 \mathbf{i}_r + x_3 \mathbf{i}_s + x_4 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \in M_2$, on peut calculer que

$$\begin{aligned}
Q_{3,c}(\varphi^{-1}(\eta)) &= (x_1 \mathbf{i}_k + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m)^3 + c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m, \\
&= (x_1^3 \mathbf{i}_k^3 + 3x_1 x_2^2 \mathbf{i}_l^2 + 3x_1 x_3^2 \mathbf{i}_m^2 + 3x_1 x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 + 6x_2 x_3 x_4 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 + c_1) \mathbf{i}_k \\
&\quad + (x_2^3 \mathbf{i}_l^3 + 3x_1^2 x_2 \mathbf{i}_k^2 + 3x_2^2 x_3 \mathbf{i}_m^2 + 3x_2 x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 + 6x_1 x_3 x_4 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_m^2 + c_2) \mathbf{i}_l \\
&\quad + (x_3^3 \mathbf{i}_m^3 + 3x_1^2 x_3 \mathbf{i}_k^2 + 3x_2^2 x_3 \mathbf{i}_l^2 + 3x_3 x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 + 6x_1 x_2 x_4 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 + c_3) \mathbf{i}_m \\
&\quad + (x_4^3 \mathbf{i}_k^3 \mathbf{i}_l^3 \mathbf{i}_m^3 + 3x_1^2 x_4 \mathbf{i}_k^2 + 3x_2^2 x_4 \mathbf{i}_l^2 + 3x_3^2 x_4 \mathbf{i}_m^2 + 6x_1 x_2 x_3) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m, \\
&= (x_1^3 \mathbf{i}_q^3 + 3x_1 x_2^2 \mathbf{i}_r^2 + 3x_1 x_3^2 \mathbf{i}_s^2 + 3x_1 x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + 6x_2 x_3 x_4 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + c_1) \mathbf{i}_q \\
&\quad + (x_2^3 \mathbf{i}_r^3 + 3x_1^2 x_2 \mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2 x_3 \mathbf{i}_s^2 + 3x_2 x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + 6x_1 x_3 x_4 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_s^2 + c_2) \mathbf{i}_r \\
&\quad + (x_3^3 \mathbf{i}_s^3 + 3x_1^2 x_3 \mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2 x_3 \mathbf{i}_r^2 + 3x_3 x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 + 6x_1 x_2 x_4 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 + c_3) \mathbf{i}_s \\
&\quad + (x_4^3 \mathbf{i}_q^3 \mathbf{i}_r^3 \mathbf{i}_s^3 + 3x_1^2 x_4 \mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2 x_4 \mathbf{i}_r^2 + 3x_3^2 x_4 \mathbf{i}_s^2 + 6x_1 x_2 x_3) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m
\end{aligned}$$

car $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_q^2$, $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$. De même, on calcule que

$$\begin{aligned} Q_{3,\varphi(c)}(\eta) &= (x_1\mathbf{i}_q + x_2\mathbf{i}_r + x_3\mathbf{i}_s + x_4\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s)^3 + c_1\mathbf{i}_q + c_2\mathbf{i}_r + c_3\mathbf{i}_s, \\ &= (x_1^3\mathbf{i}_q^3 + 3x_1x_2^2\mathbf{i}_r^2 + 3x_1x_3^2\mathbf{i}_s^2 + 3x_1x_4^2\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 6x_2x_3x_4\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + c_1)\mathbf{i}_q \\ &\quad + (x_2^3\mathbf{i}_r^3 + 3x_1^2x_2\mathbf{i}_q^2 + 3x_2x_3^2\mathbf{i}_s^2 + 3x_2x_4^2\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 6x_1x_3x_4\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_s^2 + c_2)\mathbf{i}_r \\ &\quad + (x_3^3\mathbf{i}_s^3 + 3x_1^2x_3\mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2x_3\mathbf{i}_r^2 + 3x_3x_4^2\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 6x_1x_2x_4\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2 + c_3)\mathbf{i}_s \\ &\quad + (x_4^3\mathbf{i}_q^3\mathbf{i}_r^3\mathbf{i}_s^3 + 3x_1^2x_4\mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2x_4\mathbf{i}_r^2 + 3x_3^2x_4\mathbf{i}_s^2 + 6x_1x_2x_3)\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \eta \in M_2$ et $\forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on trouve que

$$(\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = \varphi(Q_{3,c}(\varphi^{-1}(\eta))) = Q_{3,\varphi(c)}(\eta).$$

Par définition de la relation \sim , on conclut donc que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$. ■

Le dernier résultat permet de classer les coupes principales de \mathcal{M}_n^p dans les cas particuliers où $p = 2$ et $p = 3$. La proposition suivante a pour but de généraliser cette classification au cas général où $p \geq 2$.

Voici d'abord l'idée de la preuve. En utilisant la proposition 4.1.7, on peut assez intuitivement définir un isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$, qui dépend des hypothèses posées sur l'entier p et les unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r$ et \mathbf{i}_s . La partie délicate de la démarche est de s'assurer que $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ dans chacun des trois cas présentés à la proposition 4.1.7. Par la suite, on vérifie directement que

$$(\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta)$$

pour tout $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $\eta \in M_2$, d'où la conclusion voulue.

Lemme 4.2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons des unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s \in \mathbb{I}(n)$ telles que $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m sont différentes deux à deux et $\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r$ et \mathbf{i}_s le sont aussi. De plus, posons $\mathbf{i}_q^2 = \mathbf{i}_k^2$, $\mathbf{i}_r^2 = \mathbf{i}_l^2$ et $\mathbf{i}_s^2 = \mathbf{i}_m^2$.*

Soit $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et considérons la bijection linéaire $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ définie comme suit :

- i) Si p est pair et $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m = \pm\mathbf{i}_k$, on pose $\mathbf{i}_q = 1$ ou $\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s = \pm\mathbf{i}_q$ selon le cas et on définit que*

$$\varphi(x_1 + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m + x_4\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m) = x_1 + x_2\mathbf{i}_r + x_3\mathbf{i}_s + x_4\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s.$$

ii) Si p est pair, mais $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, on pose $\mathbf{i}_q \neq 1$ et $\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \neq \pm \mathbf{i}_q$ et on définit

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2 \mathbf{i}_k + x_3 \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m + x_5 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + x_6 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_7 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m + x_8 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m) \\ = x_1 + x_2 \mathbf{i}_q + x_3 \mathbf{i}_r + x_4 \mathbf{i}_s + x_5 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r + x_6 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s + x_7 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s + x_8 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s. \end{aligned}$$

iii) si p est impair, on pose

$$\varphi(x_1 \mathbf{i}_k + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m) = x_1 \mathbf{i}_q + x_2 \mathbf{i}_r + x_3 \mathbf{i}_s + x_4 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s.$$

Dans chacun de ces cas, φ est une bijection linéaire telle que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ pour tout $\eta \in M_1$.

DÉMONSTRATION. En se référant à la proposition 4.1.7, on voit facilement que φ est une bijection dans chacun des trois cas. Aussi, il est évident que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$.

De plus, à partir du lemme 4.1.3, on sait que $\eta^p \in M_1$ pour tout $\eta \in M_1$, ce qui veut dire que $\varphi(\eta^p)$ est toujours défini. De même, on sait que $\varphi(\eta)^p \in M_2$. La partie la plus ardue est de vérifier que l'égalité $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ est toujours respectée.

i) Dans le premier cas, on vérifie d'abord que $\varphi(\eta \cdot \zeta) = \varphi(\eta)\varphi(\zeta) \forall \eta, \zeta \in M_1$. En effet, posons

$$\eta = x_1 + x_2 \mathbf{i}_l + x_3 \mathbf{i}_m + x_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \quad \text{et} \quad \zeta = y_1 + y_2 \mathbf{i}_l + y_3 \mathbf{i}_m + y_4 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m.$$

On a alors que

$$\varphi(\eta) = x_1 + x_2 \mathbf{i}_r + x_3 \mathbf{i}_s + x_4 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \quad \text{et} \quad \varphi(\zeta) = y_1 + y_2 \mathbf{i}_r + y_3 \mathbf{i}_s + y_4 \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s.$$

Puisque $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$ par hypothèse, on calcule que

$$\begin{aligned} \varphi(\eta \cdot \zeta) &= \varphi(x_1 y_1 + x_2 y_2 \mathbf{i}_l^2 + x_3 y_3 \mathbf{i}_m^2 + x_4 y_4 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 \\ &\quad + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 \mathbf{i}_m^2 + x_4 y_3 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_l \\ &\quad + (x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_4 \mathbf{i}_l^2 + x_4 y_2 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_m \\ &\quad + (x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_1 y_4 + x_4 y_1) \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m), \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \mathbf{i}_r^2 + x_3 y_3 \mathbf{i}_s^2 + x_4 y_4 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 \\ &\quad + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 \mathbf{i}_s^2 + x_4 y_3 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_r \\ &\quad + (x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_4 \mathbf{i}_r^2 + x_4 y_2 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_s \\ &\quad + (x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_1 y_4 + x_4 y_1) \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s, \\ &= \varphi(\eta)\varphi(\zeta). \end{aligned}$$

En substituant ζ par η , on vérifie que $\varphi(\eta^2) = \varphi(\eta)^2$. Ensuite, supposons que $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ pour un certain p pair. On trouve donc que

$$\varphi(\eta^{p+2}) = \varphi(\eta^p \cdot \eta^2) = \varphi(\eta^p)\varphi(\eta^2) = \varphi(\eta)^p\varphi(\eta)^2 = \varphi(\eta)^{p+2}.$$

Conséquemment, par induction sur les entiers pairs, on conclut que $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ dans ce cas-ci.

ii) Le deuxième cas se démontre de manière semblable au premier cas. En effet, il est possible de vérifier, avec des calculs un peu plus laborieux, que $\varphi(\eta \cdot \zeta) = \varphi(\eta)\varphi(\zeta)$ pour tout $\eta, \zeta \in M_1$. La preuve se termine ensuite en utilisant le principe d'induction sur les entiers pairs.

iii) Le dernier cas ne peut pas être démontré comme les deux premiers. Effectivement, pour tout $\eta, \zeta \in M_1 = \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, le produit $\eta \cdot \zeta$ n'est pas toujours dans M_1 , ce qui veut dire que $\varphi(\eta \cdot \zeta)$ n'est pas toujours défini. Cependant, on sait du lemme 4.1.3 que $\eta^p \in M_1$ pour tout entier $p \geq 3$ impair. Ainsi, on peut arriver à la conclusion voulue par induction sur les entiers $p \geq 3$ impairs.

Posons $\eta \in M_1$ tel que

$$\eta = x_1\mathbf{i}_k + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m + x_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m.$$

Alors,

$$\varphi(\eta) = x_1\mathbf{i}_q + x_2\mathbf{i}_r + x_3\mathbf{i}_s + x_4\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s.$$

Considérons d'abord le cas où $p = 3$. Comme $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_q^2$, $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$, on calcule que

$$\begin{aligned} \varphi(\eta^3) &= \varphi\left((x_1\mathbf{i}_k + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m + x_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m)^3\right), \\ &= \varphi\left((x_1^3\mathbf{i}_k^2 + 3x_1x_2^2\mathbf{i}_l^2 + 3x_1x_3^2\mathbf{i}_m^2 + 3x_1x_4^2\mathbf{i}_k^2\mathbf{i}_l^2\mathbf{i}_m^2 + 6x_2x_3x_4\mathbf{i}_l^2\mathbf{i}_m^2)\mathbf{i}_k \right. \\ &\quad + (x_2^3\mathbf{i}_l^2 + 3x_1^2x_2\mathbf{i}_k^2 + 3x_2x_3^2\mathbf{i}_m^2 + 3x_2x_4^2\mathbf{i}_k^2\mathbf{i}_l^2\mathbf{i}_m^2 + 6x_1x_3x_4\mathbf{i}_k^2\mathbf{i}_m^2)\mathbf{i}_l \\ &\quad + (x_3^3\mathbf{i}_m^2 + 3x_1^2x_3\mathbf{i}_k^2 + 3x_2^2x_3\mathbf{i}_l^2 + 3x_3x_4^2\mathbf{i}_k^2\mathbf{i}_l^2\mathbf{i}_m^2 + 6x_1x_2x_4\mathbf{i}_k^2\mathbf{i}_l^2)\mathbf{i}_m \\ &\quad \left. + (x_4^3\mathbf{i}_k^2\mathbf{i}_l^2\mathbf{i}_m^2 + 3x_1^2x_4\mathbf{i}_k^2 + 3x_2^2x_4\mathbf{i}_l^2 + 3x_3^2x_4\mathbf{i}_m^2 + 6x_1x_2x_3)\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\right), \\ &= (x_1^3\mathbf{i}_q^2 + 3x_1x_2^2\mathbf{i}_r^2 + 3x_1x_3^2\mathbf{i}_s^2 + 3x_1x_4^2\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 6x_2x_3x_4\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2)\mathbf{i}_q \\ &\quad + (x_2^3\mathbf{i}_r^2 + 3x_1^2x_2\mathbf{i}_q^2 + 3x_2x_3^2\mathbf{i}_s^2 + 3x_2x_4^2\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 6x_1x_3x_4\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_s^2)\mathbf{i}_r \\ &\quad + (x_3^3\mathbf{i}_s^2 + 3x_1^2x_3\mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2x_3\mathbf{i}_r^2 + 3x_3x_4^2\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 6x_1x_2x_4\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2)\mathbf{i}_s \\ &\quad + (x_4^3\mathbf{i}_q^2\mathbf{i}_r^2\mathbf{i}_s^2 + 3x_1^2x_4\mathbf{i}_q^2 + 3x_2^2x_4\mathbf{i}_r^2 + 3x_3^2x_4\mathbf{i}_s^2 + 6x_1x_2x_3)\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s, \\ &= \varphi(\eta)^3. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ pour un certain entier impair $p \geq 3$. Par le lemme 4.1.3, nous avons que

$$\eta^p = y_1 \mathbf{i}_k + y_2 \mathbf{i}_l + y_3 \mathbf{i}_m + y_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m.$$

Ainsi,

$$\varphi(\eta^p) = y_1 \mathbf{i}_q + y_2 \mathbf{i}_r + y_3 \mathbf{i}_s + y_4 \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s.$$

De plus, on calcule que

$$\begin{aligned} \eta^{p+2} &= \eta^p \cdot \left((x_1^2 \mathbf{i}_k^2 + x_2^2 \mathbf{i}_l^2 + x_3^2 \mathbf{i}_m^2 + x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) + (2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \right. \\ &\quad \left. + (2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + (2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_k^2) \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \right), \\ &= \left(y_1 (x_1^2 \mathbf{i}_k^2 + x_2^2 \mathbf{i}_l^2 + x_3^2 \mathbf{i}_m^2 + x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) + y_2 (2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_l^2 \right. \\ &\quad \left. + y_3 (2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_m^2 + y_4 (2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_k^2) \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 \right) \mathbf{i}_k \\ &\quad + \left(y_2 (x_1^2 \mathbf{i}_k^2 + x_2^2 \mathbf{i}_l^2 + x_3^2 \mathbf{i}_m^2 + x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) + y_1 (2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_k^2 \right. \\ &\quad \left. + y_4 (2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_m^2 + y_3 (2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_k^2) \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2 \right) \mathbf{i}_l \\ &\quad + \left(y_3 (x_1^2 \mathbf{i}_k^2 + x_2^2 \mathbf{i}_l^2 + x_3^2 \mathbf{i}_m^2 + x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) + y_4 (2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_m^2) \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \right. \\ &\quad \left. + y_1 (2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_l^2) \mathbf{i}_k^2 + y_2 (2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_k^2) \mathbf{i}_l^2 \right) \mathbf{i}_m \\ &\quad + \left(y_4 (x_1^2 \mathbf{i}_k^2 + x_2^2 \mathbf{i}_l^2 + x_3^2 \mathbf{i}_m^2 + x_4^2 \mathbf{i}_k^2 \mathbf{i}_l^2 \mathbf{i}_m^2) + y_3 (2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_m^2) \right. \\ &\quad \left. + y_2 (2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_l^2) + y_1 (2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_k^2) \right) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_q^2$, $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$

$$\begin{aligned}
\varphi(\eta^{p+2}) &= \left(y_1(x_1^2 \mathbf{i}_q^2 + x_2^2 \mathbf{i}_r^2 + x_3^2 \mathbf{i}_s^2 + x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) + y_2(2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_r^2 \right. \\
&\quad \left. + y_3(2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_s^2 + y_4(2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_q^2) \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2 \right) \mathbf{i}_q \\
&\quad + \left(y_2(x_1^2 \mathbf{i}_q^2 + x_2^2 \mathbf{i}_r^2 + x_3^2 \mathbf{i}_s^2 + x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) + y_1(2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_r^2 \right. \\
&\quad \left. + y_4(2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_s^2 + y_3(2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_q^2) \mathbf{i}_s^2 \right) \mathbf{i}_r \\
&\quad + \left(y_3(x_1^2 \mathbf{i}_q^2 + x_2^2 \mathbf{i}_r^2 + x_3^2 \mathbf{i}_s^2 + x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) + y_4(2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \right. \\
&\quad \left. + y_1(2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_q^2 + y_2(2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_q^2) \mathbf{i}_r^2 \right) \mathbf{i}_s \\
&\quad + \left(y_4(x_1^2 \mathbf{i}_q^2 + x_2^2 \mathbf{i}_r^2 + x_3^2 \mathbf{i}_s^2 + x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) + y_3(2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_s^2) \right. \\
&\quad \left. + y_2(2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_r^2) + y_1(2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_q^2) \right) \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s, \\
&= \varphi(\eta^p) \cdot \left((x_1^2 \mathbf{i}_q^2 + x_2^2 \mathbf{i}_r^2 + x_3^2 \mathbf{i}_s^2 + x_4^2 \mathbf{i}_q^2 \mathbf{i}_r^2 \mathbf{i}_s^2) + (2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 \mathbf{i}_s^2) \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \right. \\
&\quad \left. + (2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \mathbf{i}_r^2) \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s + (2x_2 x_3 + 2x_1 x_4 \mathbf{i}_q^2) \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \right), \\
&= \varphi(\eta)^p \cdot \varphi(\eta)^2 = \varphi(\eta)^{p+2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque p est impair, on a que $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ pour tout $\eta \in M_1$.

Ainsi, dans tous les cas, on peut conclure que l'égalité $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ est vérifiée $\forall \eta \in M_1$. ■

Proposition 4.2.3

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et considérons des unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s \in \mathbb{I}(n)$ telles que $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m sont différentes deux à deux et $\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r$ et \mathbf{i}_s le sont aussi.

De plus, on pose comme hypothèse que $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_q^2$, $\mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_r^2$ et $\mathbf{i}_m^2 = \mathbf{i}_s^2$. Aussi :

- i) si p est pair et $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, on pose alors comme hypothèse que $\mathbf{i}_q = 1$ ou $\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s = \pm \mathbf{i}_q$ selon le cas ;
- ii) si p est pair mais $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, on pose que $\mathbf{i}_q \neq 1$ et $\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s \neq \pm \mathbf{i}_q$;
- iii) si p est impair, on ne pose aucune hypothèse supplémentaire.

Dans chacun des cas précédents, on a que $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$.

DÉMONSTRATION. Soit $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_2 = \text{It}^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$. À partir des hypothèses mentionnées dans la proposition, on voit directement du lemme 4.2.2 qu'il existe une bijection linéaire $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ telle que $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$ et $\varphi(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$ pour tout $\eta \in M_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Q_{p,c})(\eta) &= \varphi(\eta^p + c) = \varphi(\eta)^p + \varphi(c) = (Q_{p,\varphi(c)} \circ \varphi)(\eta) \quad \forall \eta \in M_1, \\ &\Leftrightarrow (\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,\varphi(c)}(\eta) \quad \forall \eta \in M_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ par définition de \sim . ■

4.3 Optimalité de l'espace tricomplexe

À la dernière section, une classification générale des coupes tridimensionnelles principales des Multibrots \mathcal{M}_n^p a été établie. Cependant, les différentes classes n'ont pas été trouvées de manière explicite. Dans cette section, on vérifie que toutes les dynamiques tridimensionnelles, à une exception près, peuvent être trouvées dans l'espace \mathbb{TC} . Autrement dit, toutes les classes d'équivalence de la relation \sim , à l'exception d'une seule, ont un représentant \mathcal{T} dans l'espace tricomplexe.

Avant d'aller plus loin, on attribue une notation particulière à certaines unités de $\mathbb{I}(n)$.

Définition 4.3.1 – Unité hyperbolique

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Les unités $j \in \mathbb{I}(n)$ telles que $j^2 = 1$ sont dites *hyperboliques*.

On note de la manière suivante les unités hyperboliques tricomplexes :

$$j_1 := i_1 i_2; \quad j_2 := i_1 i_3; \quad j_3 := i_2 i_3.$$

De plus, on définit une quatrième unité hyperbolique $j_4 := i_1 i_4$.

La prochaine proposition a donc comme objectif d'énumérer les classes d'équivalence et de leur trouver un représentant.

Proposition 4.3.2

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 4$ et $p \geq 2$. Le Multibrot \mathcal{M}_n^p possède neuf dynamiques tridimensionnelles lorsque p est pair et quatre lorsque p est impair.

DÉMONSTRATION. Pour trouver les différentes dynamiques tridimensionnelles, il suffit de trouver les classes d'équivalence de la relation \sim . Pour ce faire, on énumère tous les cas possibles à l'aide de la proposition 4.2.3.

Soit $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \mathbb{I}(n)$.

i) Dans le cas où p est pair et $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$:

- Si $\mathbf{i}_k = 1$ et \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m sont imaginaires, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(1, i_1, i_2)$.
- Si $\mathbf{i}_k = 1$, une des unités \mathbf{i}_l ou \mathbf{i}_m est imaginaire et l'autre est hyperbolique, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(1, i_1, j_1)$.
- Si $\mathbf{i}_k = 1$ et \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m sont hyperboliques, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(1, j_1, j_2)$.
- Si $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, on peut s'assurer qu'il n'y a que deux sous-cas possibles : soit on a deux unités imaginaires et une hyperbolique, soit on a trois unités hyperboliques. En effet, si $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m sont toutes imaginaires, on voit que $i_l^2 i_m^2 = 1 \neq -1 = i_k^2$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$. De même, en supposant qu'une des unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ ou \mathbf{i}_m est imaginaire et que les deux autres sont hyperboliques, on arrive à une contradiction de manière semblable. Ainsi,
 - si, parmi $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m , deux des unités sont imaginaires et la troisième est hyperbolique, on a que $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(i_1, i_2, j_1)$ car $i_1 i_2 = j_1$;
 - si les trois unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m sont hyperboliques, comme $j_1 j_2 = -j_3$, on a que $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_3)$.

ii) Dans le cas où p est pair mais $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$:

- Si $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m sont imaginaires, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$.
- Si deux des unités sont imaginaires et l'autre est hyperbolique, on a que $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(i_1, i_2, j_2)$ car $i_1 i_2 \neq \pm j_2$.
- Si une des unités est imaginaire et les autres sont hyperboliques, on a alors que $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(i_1, j_1, j_2)$.

- Si les trois unités \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m sont hyperboliques, comme $j_1 j_2 \neq \pm j_4$, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$.

iii) Dans le cas où p est impair, on sait de la proposition 4.2.3 qu'il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre les unités hyperboliques et réelles : elles ne changent pas la dynamique tridimensionnelle.

- Si \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m sont imaginaires, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$.
- Si deux des unités, supposons \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m s.p.g., sont imaginaires tandis que $\mathbf{i}_k^2 = 1$, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(1, i_1, i_2)$.
- Si une unité, supposons \mathbf{i}_l s.p.g., est imaginaire tandis que $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_m^2 = 1$, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(1, i_1, j_1)$.
- Si $\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_l^2 = \mathbf{i}_m^2 = 1$, alors $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \sim \mathcal{T}^p(1, j_1, j_2)$.

Des cas *i*) et *ii*), on obtient donc qu'il existe neuf dynamiques tridimensionnelles différentes lorsque p est pair et, du cas *iii*), on voit qu'il n'en existe que quatre lorsque p est impair. ■

De la démonstration précédente, on peut remarquer que, à une exception près, les représentants de toutes les dynamiques sont des coupes dans \mathbb{TC} . En effet, à l'exception de la coupe $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$, toutes les coupes considérées dans la démonstration sont engendrées par des unités de $\mathbb{I}(3)$.

Malgré qu'on ne puisse pas trouver toutes les dynamiques tridimensionnelles dans l'espace tricomplexe, il est tout de même possible de démontrer que la coupe $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$ est liée à la coupe $\mathcal{T}^p(1, j_1, j_2)$, appelée l'*Airbrot*, par une transformation affine. En effet, il a déjà été démontré dans [13, 27] que l'*Airbrot* est un octaèdre régulier. On peut en faire de même pour la coupe $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$.

Proposition 4.3.3

Soit l'entier pair $p \geq 2$ et considérons la coupe principale $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$, où $j_1 = i_1 i_2$, $j_2 = i_1 i_3$ et $j_4 = i_1 i_4$. La coupe \mathcal{T} correspond à l'octaèdre régulier

$$\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4) = \left\{ c_1 j_1 + c_2 j_2 + c_3 j_4 : |c_1| + |c_2| + |c_3| \leq \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $c \in \mathbb{M}(4)$. Rappelons que, de la proposition 2.1.3,

$$\mathcal{M}_n^p = \mathcal{M}_{n-1}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{M}_{n-1}^p$$

Ainsi, $c \in \mathcal{M}_4^p$ ssi $c_{\gamma_4} \in \mathcal{M}_3^p$ et $c_{\bar{\gamma}_4} \in \mathcal{M}_3^p$. Autrement dit, pour que c soit dans le Multibrot \mathcal{M}_4^p , il est nécessaire et suffisant que ses composantes idempotentes soient dans \mathcal{M}_3^p . En procédant récursivement, on déduit que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{M}_4^p &\Leftrightarrow c_{\gamma_4}, c_{\bar{\gamma}_4} \in \mathcal{M}_3^p, \\ &\Leftrightarrow c_{\gamma_3\gamma_4}, c_{\gamma_3\bar{\gamma}_4}, c_{\bar{\gamma}_3\gamma_4}, c_{\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4} \in \mathcal{M}_2^p, \\ &\Leftrightarrow c_{\gamma_2\gamma_3\gamma_4}, c_{\gamma_2\gamma_3\bar{\gamma}_4}, c_{\gamma_2\bar{\gamma}_3\gamma_4}, c_{\gamma_2\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4}, c_{\bar{\gamma}_2\gamma_3\gamma_4}, c_{\bar{\gamma}_2\gamma_3\bar{\gamma}_4}, c_{\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\gamma_4}, c_{\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4} \in \mathcal{M}_1^p, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $c \in \mathcal{M}_4^p$ ssi ses composantes idempotentes complexes sont toutes dans \mathcal{M}_1^p .

Posons $c = c_1j_1 + c_2j_2 + c_3j_4 = c_1i_1i_2 + c_2i_1i_3 + c_3i_1i_4$. En exprimant c sous sa représentation idempotente, on trouve que

$$\begin{aligned} c &= (c_1i_1i_2 + c_2i_1i_3 - c_3i_1i_3)\gamma_4 + (c_1i_1i_2 + c_2i_1i_3 + c_3i_1i_3)\bar{\gamma}_4, \\ &= (c_1i_1i_2 - c_2i_1i_2 + c_3i_1i_2)\gamma_3\gamma_4 + (c_1i_1i_2 + c_2i_1i_2 - c_3i_1i_2)\bar{\gamma}_3\gamma_4 \\ &\quad + (c_1i_1i_2 - c_2i_1i_2 - c_3i_1i_2)\gamma_3\bar{\gamma}_4 + (c_1i_1i_2 + c_2i_1i_2 + c_3i_1i_2)\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4, \\ &= (-c_1i_1i_1 + c_2i_1i_1 - c_3i_1i_1)\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + (c_1i_1i_1 - c_2i_1i_1 + c_3i_1i_1)\bar{\gamma}_2\gamma_3\gamma_4 \\ &\quad + (-c_1i_1i_1 - c_2i_1i_1 + c_3i_1i_1)\gamma_2\bar{\gamma}_3\gamma_4 + (c_1i_1i_1 + c_2i_1i_1 - c_3i_1i_1)\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\gamma_4 \\ &\quad + (-c_1i_1i_1 + c_2i_1i_1 + c_3i_1i_1)\gamma_2\gamma_3\bar{\gamma}_4 + (c_1i_1i_1 - c_2i_1i_1 - c_3i_1i_1)\bar{\gamma}_2\gamma_3\bar{\gamma}_4 \\ &\quad + (-c_1i_1i_1 - c_2i_1i_1 - c_3i_1i_1)\gamma_2\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4 + (c_1i_1i_1 + c_2i_1i_1 + c_3i_1i_1)\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4, \\ &= (c_1 - c_2 + c_3)\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + (-c_1 + c_2 - c_3)\bar{\gamma}_2\gamma_3\gamma_4, \\ &\quad + (c_1 + c_2 - c_3)\gamma_2\bar{\gamma}_3\gamma_4 + (-c_1 - c_2 + c_3)\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\gamma_4, \\ &\quad + (c_1 - c_2 - c_3)\gamma_2\gamma_3\bar{\gamma}_4 + (-c_1 + c_2 + c_3)\bar{\gamma}_2\gamma_3\bar{\gamma}_4, \\ &\quad + (c_1 + c_2 + c_3)\gamma_2\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4 + (-c_1 - c_2 - c_3)\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_4. \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que

$$c \in \mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4) \Leftrightarrow \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3 \in \mathcal{M}_1^p.$$

On remarque que les composantes idempotentes complexes de c , c'est-à-dire les nombres $\pm c_1 \pm c_2 \pm c_3$, sont en fait réelles. Aussi, il a été démontré dans [27] que l'inter-

section entre l'axe réel et \mathcal{M}_1^p est l'intervalle fermé

$$\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R} = \left[-2^{\frac{1}{p-1}}, \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3 \in \mathcal{M}_1^p &\Leftrightarrow -2^{\frac{1}{p-1}} \leq \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3 \leq \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}, \\ &\Leftrightarrow |c_1| + |c_2| + |c_3| \leq \min \left\{ 2^{\frac{1}{p-1}}, \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \right\}. \end{aligned}$$

On trouve ainsi le résultat voulu puisque $\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout entier $p \geq 2$. En effet, on sait que $2^{\frac{1}{p-1}} \geq 1$. Aussi, la suite $\{p^p\}_{p=1}^\infty$ est croissante, d'où

$$(p-1)^{p-1} \leq p^p \quad \Leftrightarrow \quad p-1 \leq p^{\frac{p}{p-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \leq 1$$

pour tout $p \geq 2$. Ainsi, $\frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \leq 1 \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $p \geq 2$. ■

Ainsi, la coupe $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$ est, tout comme l'Airbrot, un octaèdre régulier. Malgré que ce ne soient pas des octaèdres de mêmes tailles, on en déduit qu'on peut trouver une transformation affine d'une coupe à l'autre. De cette observation découle le prochain résultat.

Proposition 4.3.4

Pour toute coupe tridimensionnelle principale $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ du Multibrot \mathcal{M}_n^p , il existe une coupe principale tricomplexe $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s) \subseteq \mathbb{TC}$ et une transformation affine φ telles que $\varphi(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que p est pair, $\mathbf{i}_k \neq 1$, $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$ et que les trois unités \mathbf{i}_k , \mathbf{i}_l et \mathbf{i}_m sont hyperboliques. Considérons aussi les coupes $\mathcal{T}_2^p(1, j_1, j_2)$ et $\mathcal{T}_3^p(j_1, j_2, j_4)$ et posons $M_1 = \text{It}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ et $M_3 = \text{It}^p(j_1, j_2, j_4)$.

De la proposition 4.2.3, on sait que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_3$. Ainsi, par la proposition 3.3.1, il existe une transformation linéaire $\varphi_1 : M_1 \rightarrow M_3$ telle que $\varphi_1(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_3$. De plus, comme \mathcal{T}_3 et

\mathcal{T}_2 sont des octaèdres réguliers dans les espaces tridimensionnels $\mathbb{T}(j_1, j_2, j_4)$ et $\mathbb{T}(1, j_1, j_2)$ respectivement (proposition 4.3.3 et [13, 27]), on en déduit qu'il existe une transformation affine $\varphi_2 : \mathbb{T}(j_1, j_2, j_4) \rightarrow \mathbb{T}(1, j_1, j_2)$ telle que $\varphi_2(\mathcal{T}_3) = \mathcal{T}_2$. Ainsi, $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une transformation affine telle que

$$\varphi(\mathcal{T}_1) = \varphi_2(\varphi_1(\mathcal{T}_1)) = \varphi_2(\mathcal{T}_3) = \mathcal{T}_2,$$

d'où le résultat voulu dans ce cas-ci puisque $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathbb{TC}$.

En se référant à la démonstration de la proposition 4.3.2, on voit que, dans tous les cas à l'exception de celui présenté précédemment, il existe une coupe $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathbb{TC}$ telle que $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$. Ainsi, on déduit directement de la proposition 3.3.1 qu'il existe une transformation linéaire φ telle que $\varphi(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2 \subseteq \mathbb{TC}$. ■

Le dernier résultat permet de voir que toutes les coupes principales de \mathcal{M}_n^p peuvent être observées dans l'espace tricomplexe, à une transformation affine près. Autrement dit, en explorant les coupes principales de \mathcal{M}_n^p , il serait seulement possible de trouver des images de coupes tridimensionnelles pouvant être obtenues par une composition de réflexions, de rotations, de translations, de dilatations et de transvections [8, 25].

D'ailleurs, pour deux coupes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 équivalentes, on constate dans les preuves de ce chapitre que l'isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ liant ces deux coupes semble toujours être un isomorphisme isométrique. La relation \sim implique donc vraisemblablement une isométrie entre les coupes, comme mentionné à la fin de la section 3.3. Ainsi, si on pouvait démontrer formellement ce constat, on pourrait en déduire que toutes les coupes, excepté celles équivalentes à $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$ où p est pair, sont isométriques à une coupe tricomplexe. Toutefois, cette question demeure ouverte.

4.4 Caractérisation du Métabrot

À partir des images présentées aux figures 4.1c et 4.2d, on vérifie que la coupe $\mathcal{T}^p(1, j_1, j_2)$ est un octaèdre régulier. Ce constat a été démontré par Parisé, Ransford et Rochon [27] dans le cas où p est pair et par Parisé et Rochon [29] lorsque p est impair. Cependant, une autre coupe, le *Métabrot* $\mathcal{T}^2(i_1, i_2, i_3)$ qui est présentée à la figure 4.1f, semble aussi être un octaèdre, mais ayant une frontière fractale. Parallèlement, son

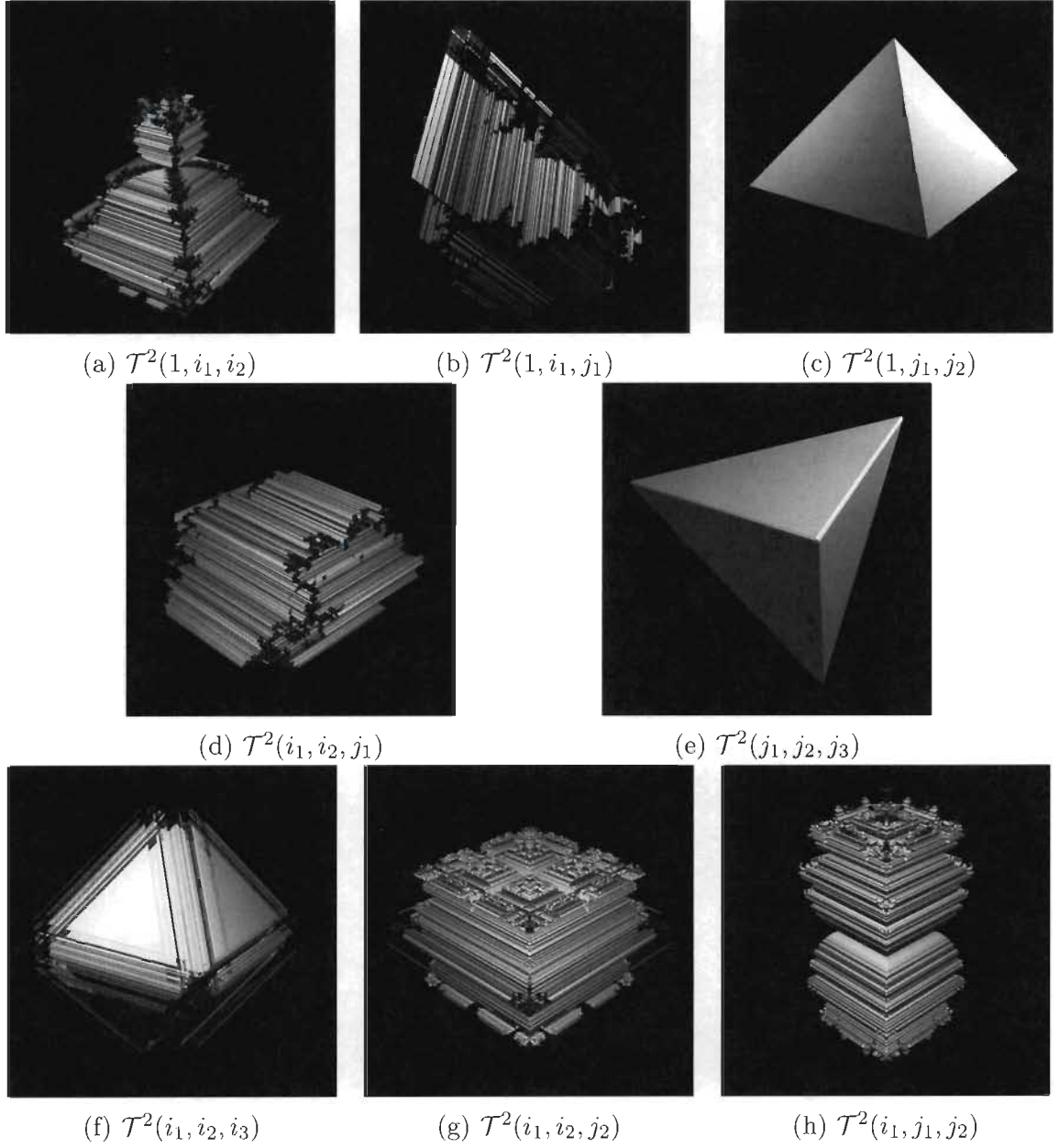
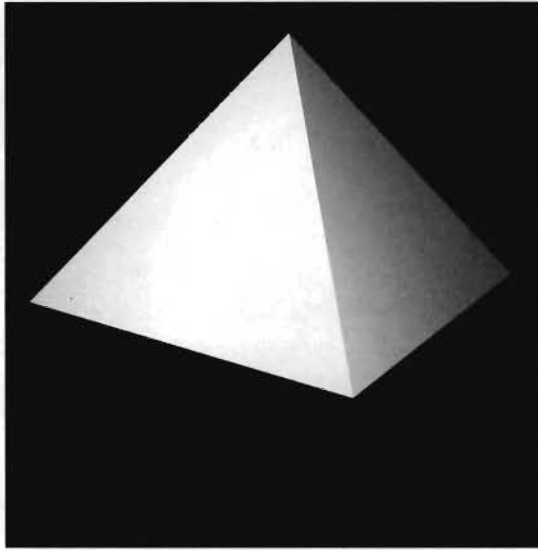
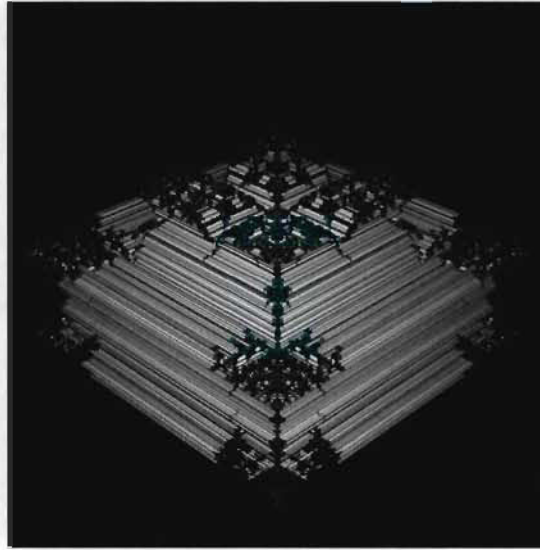
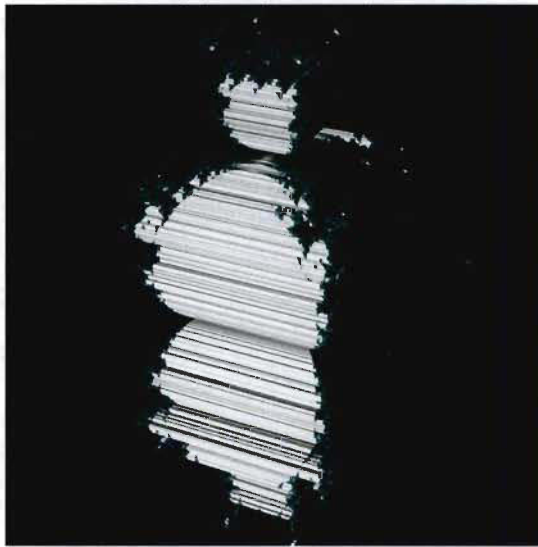
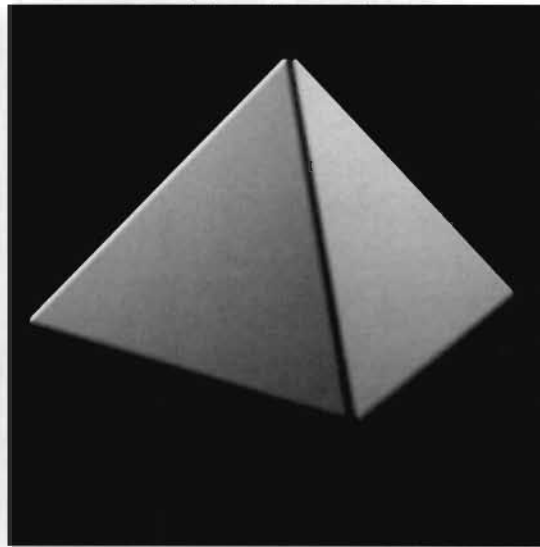


FIGURE 4.1 – Coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot généralisé tricomplexe \mathcal{M}_3^2

(a) $\mathcal{T}^3(i_1, i_2, i_3)$ (b) $\mathcal{T}^3(1, i_1, i_2)$ (c) $\mathcal{T}^3(1, i_1, j_1)$ (d) $\mathcal{T}^3(1, j_1, j_2)$ FIGURE 4.2 – Coupes tridimensionnelles principales de \mathcal{M}_3^3

analogue d'ordre $p = 3$, la coupe $\mathcal{T}^3(i_1, i_2, i_3)$ présentée à la figure 4.2b, semble être un octaèdre parfaitement régulier. Le résultat suivant permet d'éclaircir ce phénomène.

Proposition 4.4.1

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. La coupe $\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$ correspond à l'ensemble

$$\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3) = \{c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 : (\pm c_1 \pm c_2 \pm c_3) i_1 \in \mathcal{M}_1^p\}.$$

Conséquemment, $\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$ est contenue à l'intérieur de l'octaèdre régulier

$$\{c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 : |c_1| + |c_2| + |c_3| \leq M\}$$

où $M = \max\{y \in \mathbb{R} : yi_1 \in \mathcal{M}_1^p\}$.

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle de la proposition 4.3.3. Pour tout $c \in \mathbb{M}(3)$, on sait de la proposition 2.1.3 que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{M}_3^p &\Leftrightarrow c_{\gamma_3}, c_{\bar{\gamma}_3} \in \mathcal{M}_2^p, \\ &\Leftrightarrow c_{\gamma_2 \gamma_3}, c_{\gamma_2 \bar{\gamma}_3}, c_{\bar{\gamma}_2 \gamma_3}, c_{\bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3} \in \mathcal{M}_1^p, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $c \in \mathcal{M}_3^p$ ssi ses quatre composantes idempotentes complexes sont toutes dans \mathcal{M}_1^p .

Posons $c = c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3$. La forme idempotente de c est

$$\begin{aligned} c &= (c_1 i_1 + c_2 i_2 - c_3 i_2) \gamma_3 + (c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_2) \bar{\gamma}_3, \\ &= (c_1 i_1 - c_2 i_1 + c_3 i_1) \gamma_2 \gamma_3 + (c_1 i_1 + c_2 i_1 - c_3 i_1) \bar{\gamma}_2 \gamma_3 \\ &\quad + (c_1 i_1 - c_2 i_1 - c_3 i_1) \gamma_2 \bar{\gamma}_3 + (c_1 i_1 + c_2 i_1 + c_3 i_1) \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3, \\ &= (c_1 - c_2 + c_3) i_1 \gamma_2 \gamma_3 + (c_1 + c_2 - c_3) i_1 \bar{\gamma}_2 \gamma_3 \\ &\quad + (c_1 - c_2 - c_3) i_1 \gamma_2 \bar{\gamma}_3 + (c_1 + c_2 + c_3) i_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$c \in \mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3) \Leftrightarrow (c_1 \pm c_2 \pm c_3) i_1 \in \mathcal{M}_1^p.$$

De plus, on sait que $z \in \mathcal{M}_1^p \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathcal{M}_1^p$, c'est-à-dire que \mathcal{M}_1^p est symétrique par rapport à l'axe réel [26]. Ainsi, $yi_1 \in \mathcal{M}_1^p \Leftrightarrow -yi_1 \in \mathcal{M}_1^p$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit

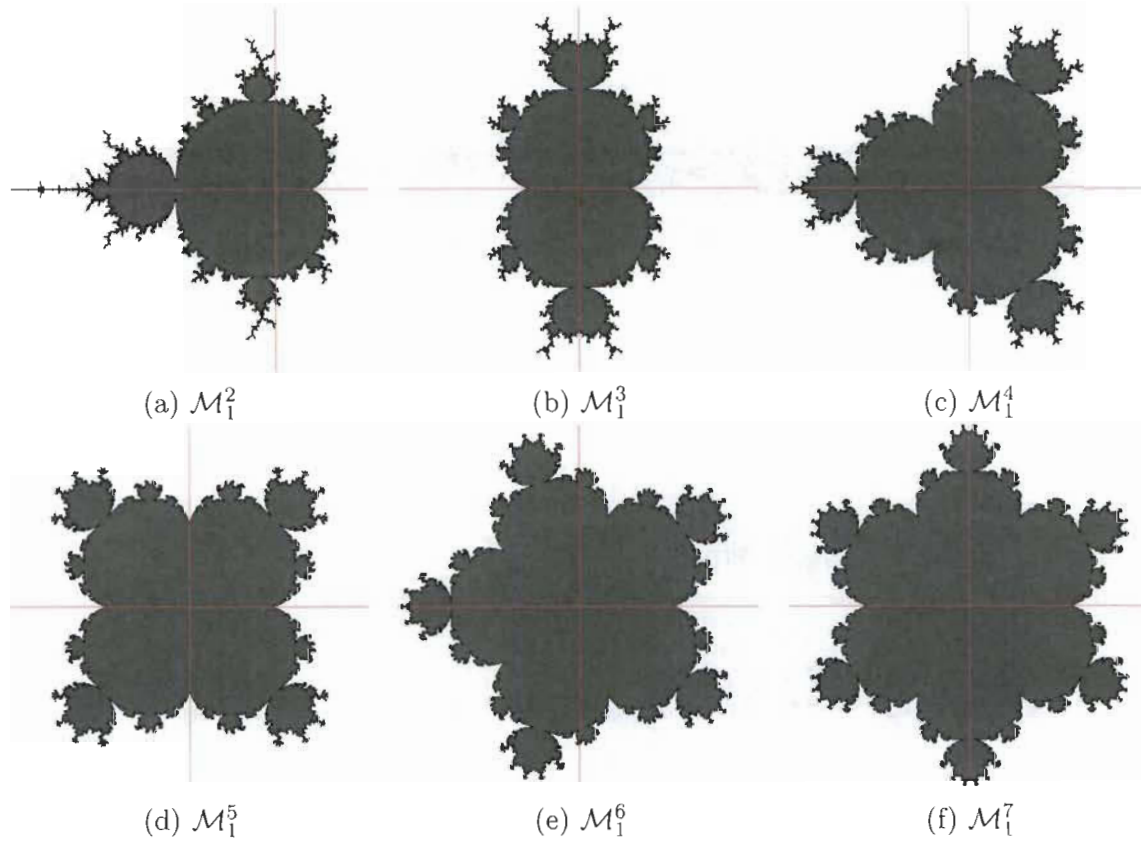


FIGURE 4.3 – Multibrots complexes avec axes réel et imaginaire

que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3) &\Leftrightarrow (c_1 \pm c_2 \pm c_3) i_1 \in \mathcal{M}_1^p, \\ &\Leftrightarrow (\pm c_1 \pm c_2 \pm c_3) i_1 \in \mathcal{M}_1^p. \end{aligned}$$

En particulier, on a que $(|c_1| + |c_2| + |c_3|) i_1 \in \mathcal{M}_1^p$. En posant

$$\begin{aligned} M &:= \sup\{y \in \mathbb{R} : yi_1 \in \mathcal{M}_1^p\}, \\ &= \max\{y \in \mathbb{R} : yi_1 \in \mathcal{M}_1^p\} \quad \text{par la compacité de } \mathcal{M}_1^p, \end{aligned}$$

on voit que $|c_1| + |c_2| + |c_3| \leq M$ pour tout $c \in \mathcal{T}$. ■

La dernière proposition permet d'expliquer intuitivement pourquoi l'octaèdre formé par la coupe $\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$, où p est pair, est fractal. En effet, à la proposition 4.3.3, où on démontrait que la coupe $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$ est un octaèdre régulier lorsque p est pair, on

pouvait déduire que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4) &\Leftrightarrow \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3 \in \mathcal{M}_1^p, \\ &\Leftrightarrow -2^{\frac{1}{p-1}} \leq \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3 \leq \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \end{aligned}$$

car $\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R} = \left[-2^{\frac{1}{p-1}}, \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \right]$ est un intervalle connexe. De cette observation, on pouvait conclure que $\mathcal{T}^p(j_1, j_2, j_4)$ est un octaèdre régulier. Cependant, pour la coupe $\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$ lorsque p est pair, l'intersection $\mathcal{M}_1^p \cap \mathbb{R}i_1$ du Multibrot et de l'axe imaginaire n'est pas un intervalle connexe : elle est l'union de plusieurs intervalles de $\mathbb{R}i_1$ (voir figure 4.3). On ne peut donc pas arriver à la même conclusion, d'où l'aspect fractal de $\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$ lorsque p est pair. Au contraire, lorsque p est impair, l'intersection $\mathcal{M}_1^p \cap \mathbb{R}i_1$ est constituée seulement d'un intervalle connexe de la forme $[-M, M]$ où $M > 0$ [2]. Ainsi, dans ce cas, on déduit que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3) &\Leftrightarrow -M \leq \pm c_1 \pm c_2 \pm c_3 \leq M, \\ &\Leftrightarrow |c_1| + |c_2| + |c_3| \leq M, \end{aligned}$$

d'où la régularité de l'octaèdre $\mathcal{T}^p(i_1, i_2, i_3)$ lorsque p est impair.

Lancer de rayons

Maintenant que les coupes tridimensionnelles ont été analysées, on présente dans ce chapitre comment les visualiser. Pour ce faire, on utilise le lancer de rayons, une technique de synthèse d'image [1, 15]. Pour générer un objet en trois dimensions à l'aide de cette technique, il est nécessaire de connaître la distance entre l'objet et un point extérieur.

Une grande partie de ce chapitre est donc consacrée à l'approximation de la distance entre un point et une fractale. Les résultats énoncés sont, pour la plupart, obtenus en généralisant des résultats de Martineau [21], Martineau et Rochon [22] ainsi que Dang, Kauffman et Sandin [9].

5.1 Distance d'un point à une fractale complexe

L'utilisation du lancer de rayons pour générer les fractales multicomplexes nécessite d'être en mesure d'estimer la distance entre une fractale et un point à l'extérieur de celle-ci. Pour l'estimer, on trouve d'abord une approximation dans le cas complexe pour ensuite la généraliser au cas multicomplexe.

Définition 5.1.1 – Distance entre un point et un ensemble

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons un ensemble $X \subset \mathbb{M}(n)$. La *distance* entre un point $\zeta \in \mathbb{M}(n)$ et l'ensemble X est

$$d(\zeta, X) = \inf \{ \|\eta - \zeta\|_n : \eta \in X \}.$$

Étudions d'abord la distance entre $\mathcal{K}_{1,c}^p$ et un point complexe $z_0 \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$. Pour la calculer, on utilise une transformation conforme, c'est-à-dire une bijection biholomorphe,

qui envoie l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ sur $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1}(0, 1)$. Pour tout entier $p \geq 2$ et pour tout $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{K}_{1,c}^p$ est connexe, il a été démontré par Milnor [24] ainsi que Douady et Hubbard [11] qu'une telle transformation $\phi_{p,c} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B_1}(0, 1)$ existe.

Lemme 5.1.2 (Théorème du module maximum [14]). *Soit un domaine ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et considérons une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Il existe un nombre $z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in U$ ssi f est constante. Autrement dit, toute fonction holomorphe non constante f ne possède aucun maximum sur son domaine ouvert U . En particulier, si U est borné, f atteint son maximum à la frontière de U .*

Théorème 5.1.3 – Représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$ et $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{K}_{1,c}^p$ est connexe. Il existe une bijection biholomorphe $\phi_{p,c} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B_1}(0, 1)$ telle que

- i) $|\phi_{p,c}(z)| \rightarrow 1$ lorsque $z \rightarrow \partial \mathcal{K}_{1,c}^p$;
- ii) $\phi_{p,c}(z) \sim z$ lorsque $z \rightarrow \infty$;
- iii) $\phi_{p,c}(Q_{p,c}(z)) = \phi_{p,c}(z)^p$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$;
- iv) $\phi_{p,c}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} (Q_{p,c}^m(z))^{\frac{1}{p^m}}$, où la limite converge uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$.

Remarque. Rappelons que, pour un sous-ensemble $A \subseteq E$ d'un espace topologique E , ∂A représente la frontière de A .

Remarque. La notation $\phi_{p,c}(z) \sim z$ signifie que $\frac{\phi_{p,c}(z)}{z} \rightarrow 1$.

DÉMONSTRATION. L'existence de la fonction est démontrée par Milnor [24] ainsi que Douady et Hubbard [11]. Aussi, les propriétés ii) à iv) sont prouvées par Milnor (voir section 9 dans [24]).

Pour démontrer la propriété i), on pose $W(z) = \frac{1}{\phi_{p,c}(z)}$. Comme $\phi_{p,c}$ est biholomorphe et non constante, il en est de même pour W . Ainsi, par le théorème du module maximum, on sait que $|W|$ ne possède aucun maximum sur son domaine $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$. Son maximum est donc atteint soit lorsque $z \rightarrow \infty$, soit lorsque $z \rightarrow \partial \mathcal{K}_{1,c}^p$. Cependant, lorsque $z \rightarrow \infty$, on voit de la propriété ii) que

$$|W(z)| = \left| \frac{1}{\phi_{p,c}(z)} \right| \sim \left| \frac{1}{z} \right| \rightarrow 0,$$

d'où $|W(z)| \rightarrow 0$. Nécessairement, on déduit donc que $|W(z)|$ est maximal, ou encore que $|\phi_{p,c}(z)|$ est minimal, lorsque $z \rightarrow \partial\mathcal{K}_{1,c}^p$. Ainsi, comme $\inf\{|\phi_{p,c}(z)| : z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p\} = 1$, on conclut que $|\phi_{p,c}(z)| \rightarrow 1$ lorsque $z \rightarrow \partial\mathcal{K}_{1,c}^p$. ■

À partir de $\phi_{p,c}$, il est possible de définir une fonction potentiel G qui associe un nombre réel positif à tout point à l'extérieur de $\mathcal{K}_{1,c}^p$.

Théorème 5.1.4 – Fonction de Green associée à $\mathcal{K}_{1,c}^p$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$ et $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{K}_{1,c}^p$ est connexe. La fonction $G : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow]0, \infty[$ telle que

$$G(z) = \ln |\phi_{p,c}(z)|,$$

où $\phi_{p,c}$ est la transformation conforme telle que définie au théorème 5.1.3, est la fonction de Green associée à l'ensemble $\mathcal{K}_{1,c}^p$. Celle-ci possède les propriétés suivantes :

- i) $G(z) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \partial\mathcal{K}_{1,c}^p$;*
- ii) $G(z) \sim \ln |z|$ lorsque $z \rightarrow \infty$;*
- iii) $G(Q_{p,c}(z)) = pG(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$;*
- iv) $G(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m}$, où la limite converge uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$.*

DÉMONSTRATION. Les propriétés de G découlent directement de celles de $\phi_{p,c}$. ■

Considérons la dérivée G' définie de la manière suivante :

$$G' = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right) \quad \text{où } z = x + yi_1.$$

La fonction G ainsi que sa dérivée G' permettent de borner la distance entre $\mathcal{K}_{1,c}^p$ et $z_0 \notin \mathcal{K}_{1,c}^p$. La prochaine proposition a été démontrée par Martineau et Rochon dans [22] dans le cas où $p = 2$ et par Brouillette, Parisé et Rochon dans [4] dans le cas général. Pour la démontrer, plusieurs lemmes sont nécessaires.

Lemme 5.1.5 (Théorème B.1 dans [21]). *Considérons une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe où $U \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Posons aussi $z = x + yi_1$, c'est-à-dire que f dépend des*

variables $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $z \in U$,

$$|f'(z)| = ||f(z)||'$$

où $f'(z) = \frac{df}{dz}$ et

$$|f(z)|' = \left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial x}, \frac{\partial |f(z)|}{\partial y} \right). \quad (5.1)$$

Lemme 5.1.6 (Théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe [9]). Soit $B = B_1(0, 1)$ et considérons une fonction analytique et injective $f : B \rightarrow \mathbb{C}$. Si $|f'(0)| = R$, alors $B_1(z_0, \frac{R}{4}) \subseteq f(B)$ où $z_0 = f(0)$.

Lemme 5.1.7 (Lemme de Schwarz généralisé [14, 21]). Soit $f : B_1(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction holomorphe telle que $f(z_0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in B_1(z_0, r)$. Alors, $|f(z)| \leq \frac{|z-z_0|}{r}$ pour tout $z \in B_1(z_0, r)$ et $|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}$. De plus, s'il n'existe aucune constante $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = a(z - z_0)$, alors les inégalités précédentes sont strictes pour tout $z \neq z_0$.

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$. Comme f est holomorphe en particulier en z_0 , on vérifie aisément que

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

En définissant $g(z_0) := f'(z_0)$, on voit donc que g est analytique sur tout le domaine $B_1(z_0, r)$. De plus, comme $B_1(z_0, r)$ est ouvert, pour tout $z \in B_1(z_0, r)$, on peut trouver une valeur ε telle que $0 < \varepsilon < r$ et $z \in B_1(z_0, r - \varepsilon) \subset B_1(z_0, r)$. À la frontière de ce disque, c'est-à-dire pour $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta - z_0| = r - \varepsilon$, on voit que

$$|g(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|f(\zeta)|}{r - \varepsilon} \leq \frac{1}{r - \varepsilon}.$$

Du théorème du module maximum, on en déduit que $|g(z)| \leq \frac{1}{r - \varepsilon}$ pour $z \in B_1(z_0, r - \varepsilon)$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on voit donc que $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour tout $z \in B_1(z_0, r)$. Ainsi, par définition de g , on obtient que $|f(z)| \leq \frac{|z-z_0|}{r}$ et, en particulier, $|g(z_0)| = |f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}$.

Par ailleurs, supposons que $|f'(z_0)| = \frac{1}{r}$ ou $|f(z)| = \frac{|z-z_0|}{r}$ pour un certain nombre $z \in B_1(z_0, r)$ tel que $z \neq z_0$.

- i) Si $|f'(z_0)| = \frac{1}{r}$, alors $|g(z_0)| = \frac{1}{r}$ et, par le théorème du module maximum, on trouve que g doit être constante, c'est-à-dire que $g(z) = a \in \mathbb{C}$ pour tout $z \in B_1(z_0, r)$. Par définition de g , on en conclut que $f(z) = a(z - z_0)$.

ii) Si $|f(z)| = \frac{|z-z_0|}{r}$ où $z \neq z_0$, on a alors que $|g(z)| = \frac{1}{r}$. Du théorème du module maximum, on déduit que g doit nécessairement être constante, d'où $g(z) = a \in \mathbb{C}$ pour tout $z \in B_1(z_0, r)$. Autrement dit, $f(z) = a(z - z_0)$.

Dans les deux cas, on trouve que $f(z) = a(z - z_0)$ pour une certaine constante $a \in \mathbb{C}$. En utilisant la contraposition, on voit que si $f(z) \neq a(z - z_0)$, alors $|f'(z_0)| \neq \frac{1}{r}$ et $|f(z)| \neq \frac{|z-z_0|}{r}$ pour tout $z \neq z_0$. ■

Proposition 5.1.8

Soit $p \in \mathbb{N}$ où $p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{K}_{1,c}^p$ est connexe. Alors, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$, on a

$$\frac{\sinh(G(z))}{2e^{G(z)}|G'(z)|} \leq d(z, \mathcal{K}_{1,c}^p) < \frac{2 \sinh(G(z))}{|G'(z)|}$$

où G est la fonction de Green de $\mathcal{K}_{1,c}^p$ et $G' = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right)$.

DÉMONSTRATION. Ce résultat est démontré dans [9, 21] dans le cas où $p = 2$. On vérifie ici que la preuve demeure valide dans le cas général où $p \geq 2$.

Borne supérieure. Voici l'idée de la preuve. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$, on construit une bijection biholomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow B$ telle que $f(z_0) = 0$. Comme f est définie en particulier sur $B_1(z_0, r)$ où $r = d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p)$, on peut utiliser le lemme de Schwarz et affirmer que $r < \frac{1}{|f'(z_0)|}$ d'où le résultat.

Considérons la fonction W définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ telle que $W(z) = \frac{1}{\phi_{p,c}(z)}$. Sachant que $|\phi_{p,c}(z)| > 1$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$, on voit que $0 < |W(z)| < 1$. Ainsi, on peut écrire que $W : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow B^*$ où $B^* := B_1(0, 1) \setminus \{0\}$. Remarquons que W est inversible et biholomorphe car $\phi_{p,c}$ est une fonction bijective et biholomorphe.

De plus, posons $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ et notons $w_0 := W(z_0)$. Considérons aussi la fonction F définie sur B telle que

$$F(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}.$$

Pour tout $w \in B$, on peut vérifier que $|F(w)| < 1$. En effet, en posant $w = x + yi_1$ et $w_0 = a + bi_1$, on voit que

$$\begin{aligned}
|F(w)|^2 < 1 &\Leftrightarrow |w - w_0|^2 < |1 - \overline{w_0}w|^2, \\
&\Leftrightarrow |(x - a) + (y - b)i_1|^2 < |(1 - xa - yb) + (xb - ya)i_1|^2, \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 2xa + a^2) + (y^2 - 2yb + b^2) \\
&\quad < (1 + x^2a^2 + y^2b^2 - 2xa - 2yb + 2xyab) + (x^2b^2 - 2xyab + y^2a^2), \\
&\Leftrightarrow x^2 + a^2 + y^2 + b^2 < 1 + x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2, \\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) < 1 + (x^2 + y^2)(a^2 + b^2), \\
&\Leftrightarrow |w|^2 + |\overline{w_0}|^2 < 1 + |w|^2|\overline{w_0}|^2, \\
&\Leftrightarrow |w|^2 - |w|^2|\overline{w_0}|^2 + |\overline{w_0}|^2 < 1, \\
&\Leftrightarrow |w|^2(1 - |\overline{w_0}|^2) < 1 - |\overline{w_0}|^2, \\
&\Leftrightarrow |w|^2 < 1.
\end{aligned}$$

On écrit donc $F : B \rightarrow B$. En fait, comme F est une transformation de Möbius, elle est bijective [14].

De plus, on voit que F est holomorphe sur tout son domaine puisque son dénominateur est toujours non nul. En effet, on sait que $|\overline{w_0}| < 1$ et $|w| < 1$ pour tout $w \in B$, d'où $|\overline{w_0}w| < 1$ et $\overline{w_0}w \neq 1$. On peut donc calculer la dérivée de F en tout point $w \in B$:

$$F'(w) = \frac{(1 - \overline{w_0}w) + \overline{w_0}(w - w_0)}{(1 - \overline{w_0}w)^2} = \frac{1 - |w_0|^2}{(1 - \overline{w_0}w)^2}.$$

En particulier, en w_0 , on obtient que

$$F'(w_0) = \frac{1 - |w_0|^2}{(1 - \overline{w_0}w_0)^2} = \frac{1 - |w_0|^2}{(1 - |w_0|^2)^2} = \frac{1}{1 - |w_0|^2}.$$

De plus, comme $|w_0| < 1$, on remarque que $F'(w_0) > 0$, d'où $|F'(w_0)| = F'(w_0)$.

Par ailleurs, comme $F(0) = -w_0$, on voit que $F(B^*) = B \setminus \{-w_0\}$, et on peut donc écrire $(F \circ W) : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow B \setminus \{-w_0\}$. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$, $|(F \circ W)(z)| < 1$.

Soit $r = d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p)$. On voit que $B_1(z_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ par définition de la distance d . Aussi, on a que $(F \circ W)(z_0) = F(w_0) = 0$ et $|(F \circ W)(z)| < 1$ pour tout $z \in B_1(z_0, r)$ en

particulier puisque c'est vrai sur tout le domaine $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$. Ainsi, on peut utiliser le lemme de Schwarz avec la fonction $F \circ W$. On en déduit que

$$\begin{aligned} |(F \circ W)'(z_0)| &< \frac{1}{r}, \\ \Leftrightarrow r &< \frac{1}{|(F \circ W)'(z_0)|}. \end{aligned}$$

En utilisant la dérivée en chaîne, on voit que $(F \circ W)'(z_0) = F'(w_0) \cdot W'(z_0) = \frac{W'(z_0)}{1-|w_0|^2}$. Ainsi, on trouve que

$$r < \frac{1 - |w_0|^2}{|W'(z_0)|}.$$

Il ne reste qu'à réécrire les expressions w_0 et $|W'(z_0)|$ en fonction de G . Du lemme 5.1.5, on peut vérifier que [21]

$$|G'(z_0)| = \frac{|\phi_{p,c}(z_0)|'}{|\phi_{p,c}(z_0)|} = \frac{|\phi_{p,c}(z_0)|'}{|\phi_{p,c}(z_0)|} = \left| \frac{\phi'_{p,c}(z_0)}{\phi_{p,c}(z_0)} \right|.$$

Ainsi, comme $e^{G(z_0)} = |\phi_{p,c}(z_0)|$, on trouve que

$$|W'(z_0)| = \left| \frac{\phi'_{p,c}(z_0)}{(\phi_{p,c}(z_0))^2} \right| = \frac{|G'(z_0)|}{e^{G(z_0)}}.$$

De plus, on voit que

$$1 - |w_0|^2 = 1 - \frac{1}{|\phi_{p,c}(z_0)|^2} = 1 - e^{-2G(z_0)} = \frac{e^{G(z_0)} - e^{-G(z_0)}}{e^{G(z_0)}} = \frac{2 \sinh(G(z_0))}{e^{G(z_0)}},$$

d'où

$$d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p) = r < \frac{1 - |w_0|^2}{|W'(z_0)|} = \frac{2 \sinh(G(z_0))}{|G'(z_0)|}.$$

Borne inférieure. Pour trouver la borne inférieure, on utilise à nouveau les fonctions F et W présentées précédemment. Essentiellement, à partir de $(F \circ W)^{-1}$, on définit une application injective holomorphe $\omega : B \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ telle $\omega(0) = z_0$. En utilisant le théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe, on déduit ensuite que $d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p) \geq \frac{R}{4}$ où $R = |\omega'(0)|$.

Posons $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ et considérons à nouveau les fonctions $W : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow B^*$ et $F : B^* \rightarrow B \setminus \{-w_0\}$ telles que définies précédemment. Comme elles sont bijectives et

biholomorphes, on déduit que $F \circ W$ est inversible et biholomorphe et, par conséquent, $(F \circ W)^{-1} : B \setminus \{-w_0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ est aussi holomorphe. En particulier, l'application $(F \circ W)^{-1}$ restreinte au domaine $B_1(0, |w_0|)$ est injective et holomorphe.

De plus, on sait que si $z \in B$, alors $|w_0|z \in B_1(0, |w_0|)$. Ainsi, on peut définir une application injective et holomorphe $\omega : B \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ de la manière suivante :

$$\omega(z) = (F \circ W)^{-1}(|w_0|z).$$

Sachant que $(F \circ W)(z_0) = F(w_0) = 0$, on déduit que $\omega(0) = (F \circ W)^{-1}(0) = z_0$. Par le théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe, on trouve ainsi que $B_1(z_0, \frac{R}{4}) \subseteq \omega(B) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ où $R = |\omega'(0)|$. Autrement dit, $d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p) \geq \frac{R}{4}$. Il ne reste qu'à déterminer la valeur de $|\omega'(0)|$.

Comme $F'(w) = \frac{1-|w_0|^2}{(1-\overline{w_0}w)^2}$ et $W'(z) = -\frac{\phi'_{p,c}(z)}{(\phi_{p,c}(z))^2}$, par la dérivée en chaîne, on calcule que

$$\begin{aligned} (F \circ W)'(z) &= F'(W(z)) W'(z), \\ &= -\frac{1-|w_0|^2}{(1-\overline{w_0}W(z))^2} \frac{\phi'_{p,c}(z)}{(\phi_{p,c}(z))^2}, \\ &= -\frac{(1-|w_0|^2) \phi'_{p,c}(z) W(z)^2}{(1-\overline{w_0}W(z))^2}. \end{aligned}$$

Lorsque $z = z_0$, on a donc

$$(F \circ W)'(z_0) = -\frac{(1-|w_0|^2) \phi'_{p,c}(z_0) w_0^2}{(1-\overline{w_0}w_0)^2} = -\frac{(1-|w_0|^2) \phi'_{p,c}(z_0) w_0^2}{(1-|w_0|^2)^2} = \frac{\phi'_{p,c}(z_0) w_0^2}{|w_0|^2 - 1}.$$

Ainsi, comme $(F \circ W)^{-1}(0) = z_0$, on a

$$\left((F \circ W)^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{(F \circ W)'((F \circ W)^{-1}(0))} = \frac{1}{(F \circ W)'(z_0)} = \frac{|w_0|^2 - 1}{\phi'_{p,c}(z_0) w_0^2}.$$

En utilisant la dérivée en chaîne, on trouve donc que

$$\begin{aligned} |\omega'(z)| &= \left| \left((F \circ W)^{-1}\right)'(|w_0|z) \cdot (|w_0|z)' \right| = \left| \left((F \circ W)^{-1}\right)'(|w_0|z) \right| |w_0|, \\ \Rightarrow |\omega'(0)| &= \left| \left((F \circ W)^{-1}\right)'(0) \right| |w_0| = \frac{|w_0|^2 - 1}{|\phi'_{p,c}(z_0)| |w_0|^2} = \frac{1 - |w_0|^2}{|\phi'_{p,c}(z_0)| |w_0|}. \end{aligned}$$

En substituant $|w_0| = \left| \frac{1}{\phi_{p,c}(z_0)} \right|$, on trouve que

$$|\omega'(0)| = \frac{1 - \left| \frac{1}{\phi_{p,c}(z_0)} \right|^2}{\left| \phi'_{p,c}(z_0) \right| \left| \frac{1}{\phi_{p,c}(z_0)} \right|} = \frac{|\phi_{p,c}(z_0)|^2 - 1}{|\phi_{p,c}(z_0)| |\phi'_{p,c}(z_0)|}.$$

Sachant que $e^{G(z_0)} = |\phi_{p,c}(z_0)|$ et $|G'(z_0)| = \left| \frac{\phi'_{p,c}(z_0)}{\phi_{p,c}(z_0)} \right|$, on calcule que

$$|\omega'(0)| = \frac{|\phi_{p,c}(z_0)|^2 - 1}{|\phi_{p,c}(z_0)|^2 \left| \frac{\phi'_{p,c}(z_0)}{\phi_{p,c}(z_0)} \right|} = \frac{e^{2G(z_0)} - 1}{e^{2G(z_0)} |G'(z_0)|} = \frac{e^{G(z_0)} - e^{-G(z_0)}}{e^{G(z_0)} |G'(z_0)|} = \frac{2 \sinh(G(z_0))}{e^{G(z_0)} |G'(z_0)|}$$

Ainsi, comme $d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p) > \frac{|\omega'(0)|}{4}$ par le théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe, on conclut que

$$d(z_0, \mathcal{K}_c^p) \geq \frac{\sinh(G(z_0))}{2e^{G(z_0)} |G'(z_0)|}. \quad \blacksquare$$

Remarque. Dans [9, 21], on énonce plutôt que $\frac{\sinh(G(z_0))}{2e^{G(z_0)} |G'(z_0)|} < d(z_0, \mathcal{K}_c^p)$, c'est-à-dire que la première inégalité du théorème précédent est stricte. Cependant, ce n'est pas vérifiable facilement. Comme le résultat présenté ici est suffisant, on ne vérifiera pas l'inégalité stricte.

Ce résultat est primordial lors du calcul de la distance entre un point et l'ensemble $\mathcal{K}_{1,c}^p$. Cependant, il n'est pas facilement utilisable en pratique puisqu'on ne connaît pas l'expression exacte de G et de G' . Néanmoins, il est possible d'approximer ces fonctions.

Proposition 5.1.9

Soit $p \in \mathbb{N}$ où $p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{K}_{1,c}^p$ est connexe. Alors, pour $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$ assez près de la fractale, les bornes de $d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p)$ présentées à la proposition 5.1.8 peuvent être approximées par les expressions

$$\frac{|z_m| \ln |z_m|}{2|z_m|^{\frac{1}{p^m}} |z'_m|} \leq d(z_0, \mathcal{K}_{1,c}^p) < \frac{2|z_m| \ln |z_m|}{|z'_m|}$$

où $z_m := Q_{p,c}^m(z_0)$ et $z'_m := \frac{d}{dz} (Q_{p,c}^m(z)) \Big|_{z=z_0}$.

DÉMONSTRATION. Pour arriver à ce résultat, on doit trouver des approximations de $G(z)$ et $|G'(z)|$.

On sait que $G(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m}$, où on a la convergence uniforme. De cette expression, on obtient directement que

$$e^{G(z)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} |Q_{p,c}^m(z)|^{\frac{1}{p^m}}.$$

Pour ce qui est de $|G'(z)|$, on utilise le lemme 5.1.5. D'abord, on calcule que

$$\begin{aligned}
 |G'(z)| &= \left| \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right| && \text{par définition de } G', \\
 &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m} \right) \right) \right| && \text{par substitution,} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m} \right) \right) \right| && \text{dû à la convergence} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} (\ln |Q_{p,c}^m(z)|), \frac{\partial}{\partial y} (\ln |Q_{p,c}^m(z)|) \right) \right| && \text{car } (kf(z))' = kf'(z), \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m |Q_{p,c}^m(z)|} \left| \left(\frac{\partial |Q_{p,c}^m(z)|}{\partial x}, \frac{\partial |Q_{p,c}^m(z)|}{\partial y} \right) \right| && \text{car } (\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}.
 \end{aligned}$$

Ensuite, comme $Q_{p,c}^m(z)$ est un polynôme, c'est une fonction holomorphe. On voit donc que

$$\begin{aligned}
 |G'(z)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m |Q_{p,c}^m(z)|} \left| (Q_{p,c}^m(z))' \right| && \text{de l'équation 5.1,} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|(Q_{p,c}^m(z))'|}{p^m |Q_{p,c}^m(z)|} && \text{par le lemme 5.1.5.}
 \end{aligned}$$

À partir de ces expressions de $G(z)$ et $|G'(z)|$, il est possible d'écrire les bornes de $d(z, \mathcal{K}_{1,c}^p)$ présentées à la proposition 5.1.8 autrement. En effet, en fixant une valeur m assez grande, on peut écrire que

$$e^{G(z)} \approx |Q_{p,c}^m(z)|^{\frac{1}{p^m}}; \quad G(z) \approx \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m}; \quad |G'(z)| \approx \frac{|(Q_{p,c}^m(z))'|}{p^m |Q_{p,c}^m(z)|}.$$

De plus, lorsque $z \rightarrow \partial \mathcal{K}_{1,c}^p$, on sait que $G(z) \rightarrow 0$, donc $\sinh(G(z)) \sim G(z)$. Ainsi, lorsque z est assez proche de $\mathcal{K}_{1,c}^p$, on peut approximer $\sinh(G(z)) \approx G(z)$ et on calcule que

$$\frac{\sinh(G(z))}{2e^{G(z)}|G'(z)|} \approx \frac{G(z)}{2e^{G(z)}|G'(z)|} \approx \frac{\ln |Q_{p,c}^m(z)|}{2 |Q_{p,c}^m(z)|^{\frac{1}{p^m}} p^m} \frac{p^m |Q_{p,c}^m(z)|}{|(Q_{p,c}^m(z))'|} = \frac{|Q_{p,c}^m(z)| \ln |Q_{p,c}^m(z)|}{2 |Q_{p,c}^m(z)|^{\frac{1}{p^m}} |(Q_{p,c}^m(z))'|}$$

et

$$\frac{2 \sinh(G(z))}{|G'(z)|} \approx \frac{2G(z)}{|G'(z)|} \approx \frac{2 \ln |Q_{p,c}^m(z)|}{p^m} \cdot \frac{p^m |Q_{p,c}^m(z)|}{|(Q_{p,c}^m(z))'|} = \frac{2 |Q_{p,c}^m(z)| \ln |Q_{p,c}^m(z)|}{|(Q_{p,c}^m(z))'|}.$$

En évaluant ces expressions en $z = z_0$, on trouve les approximations voulues des bornes présentées à la proposition 5.1.8. ■

On peut en faire de même avec les Multibrots complexes \mathcal{M}_1^p . Effectivement, il a été démontré par Beardon [3] ainsi que par Douady et Hubbard [11] que, sur un certain voisinage de ∞ , il est toujours possible de définir une transformation conforme $\phi_{p,c}$ ayant des propriétés similaires à celles de la transformation présentée au théorème 5.1.3, même lorsque $\mathcal{K}_{1,c}^p$ n'est pas connexe. Ainsi, essentiellement, on peut trouver une transformation conforme allant de l'extérieur de \mathcal{M}_1^p à l'extérieur du disque unitaire en définissant $\psi_p := \phi_{p,c}$. Cette dernière affirmation a seulement été démontrée pour $p = 2$ [3, 11], mais est généralisable au cas général où $p \geq 2$ [4].

Théorème 5.1.10 – Représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p$

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$, il existe une bijection biholomorphe $\psi_p : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0, 1)$ telle que

- i) $|\psi_p(c)| \rightarrow 1$ lorsque $c \rightarrow \partial \mathcal{M}_1^p$;*
- ii) $\psi_p(c) \sim c$ lorsque $c \rightarrow \infty$;*
- iii) $\psi_p(Q_{p,c}^2(0)) = \psi(c)^p$ pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p$;*
- iv) $\psi_p(c) = \lim_{m \rightarrow \infty} (Q_{p,c}^{m+1}(0))^{\frac{1}{p^m}}$, où la limite converge uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$.*

DÉMONSTRATION. Considérons à nouveau la transformation $\phi_{p,c} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p \rightarrow \mathbb{C} \setminus B_1(0, 1)$ du théorème 5.1.3. Dans le cas où $p = 2$, il a été démontré par Beardon [3] ainsi que par Douady et Hubbard [11] qu'en définissant $\psi_p(c) := \phi_{p,c}(c)$, on obtient une transformation conforme ayant les mêmes propriétés que $\phi_{p,c}$. Dans le cas général $p \geq 2$, on pourrait démontrer que cette affirmation est aussi vraie de manière semblable.

Les propriétés *i)* à *iv)* découlent donc directement des propriétés de $\phi_{p,c}$. Il suffit de remplacer z par c dans le théorème 5.1.3 et de remarquer que $Q_{p,c}(c) = c^p + c = Q_{p,c}^2(0)$. ■

L'application ψ_p permet de définir une nouvelle fonction de Green G sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p$.

Théorème 5.1.11 – Fonction de Green associée à \mathcal{M}_1^p

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. La fonction $G : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p \rightarrow]0, \infty[$ telle que

$$G(c) = \ln |\psi_p(c)|,$$

où ψ_p est la transformation conforme telle que définie au théorème 5.1.10, est la fonction de Green associée à l'ensemble \mathcal{M}_1^p . Celle-ci possède les propriétés suivantes :

- i) $|G(c)| \rightarrow 0$ lorsque $c \rightarrow \partial \mathcal{M}_1^p$;
- ii) $G(c) \sim \ln |c|$ lorsque $c \rightarrow \infty$;
- iii) $G(Q_{p,c}^2(0)) = p G(c)$ pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p$;
- iv) $G(c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^{m+1}(0)|}{p^m}$, où la limite converge uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{1,c}^p$.

DÉMONSTRATION. Ce résultat est une conséquence directe des propriétés de ϕ_p . ■

En utilisant la dérivée $G' = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right)$, où $c = x + yi$, on peut borner la distance entre \mathcal{M}_1^p et $c_0 \notin \mathcal{M}_1^p$ comme à la proposition 5.1.8 [4, 21].

Proposition 5.1.12

Soit $p \in \mathbb{N}$ où $p \geq 2$. Alors, pour $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p$, on a

$$\frac{\sinh(G(c))}{2e^{G(c)}|G'(c)|} \leq d(c, \mathcal{M}_1^p) < \frac{2 \sinh(G(c))}{|G'(c)|}$$

où G est la fonction de Green de \mathcal{M}_1^p et $G' = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right)$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est identique à celle de la proposition 5.1.8. Il suffit de remplacer $\phi_{p,c}$ par ψ_p et $\mathcal{K}_{1,c}^p$ par \mathcal{M}_1^p . ■

De plus, ces bornes peuvent être approximées de la manière suivante.

Proposition 5.1.13

Soit $p \in \mathbb{N}$ où $p \geq 2$. Alors, pour $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}_1^p$ assez près de la fractale, les bornes de $d(c_1, \mathcal{M}_1^p)$ présentées à la proposition 5.1.12 peuvent être approximées par les expressions

$$\frac{|c_m| \ln |c_m|}{2|c_m|^{\frac{1}{p^{m-1}}}|c'_m|} \leq d(c_1, \mathcal{M}_1^p) < \frac{2|c_m| \ln |c_m|}{|c'_m|}$$

où $c_m := Q_{p,c_1}^m(0)$ et $c'_m := \frac{d}{dc} (Q_{p,c}^m(0)) \Big|_{c=c_1}$.

DÉMONSTRATION. On procède de manière analogue à la proposition 5.1.9. Sachant que $G(c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}}$, on calcule que $e^{G(c)} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln |Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} |Q_{p,c}^m(0)|^{\frac{1}{p^{m-1}}}$. De plus, pour $|G'(c)|$, on calcule d'abord que

$$\begin{aligned} |G'(c)| &= \left| \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right| && \text{par définition de } G', \\ &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}} \right) \right) \right| && \text{par substitution,} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\ln |Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\ln |Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}} \right) \right) \right| && \text{dû à la convergence} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{m-1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} (\ln |Q_{p,c}^m(0)|), \frac{\partial}{\partial y} (\ln |Q_{p,c}^m(0)|) \right) \right| && \text{car } (kf(z))' = kf'(z), \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{m-1} |Q_{p,c}^m(0)|} \left| \left(\frac{\partial |Q_{p,c}^m(0)|}{\partial x}, \frac{\partial |Q_{p,c}^m(0)|}{\partial y} \right) \right| && \text{car } (\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \end{aligned}$$

Comme $Q_{p,c}^m(0)$ est holomorphe selon la variable c , du lemme 5.1.5, on a

$$\begin{aligned} |G'(c)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{m-1} |Q_{p,c}^m(0)|} \left| (Q_{p,c}^m(0))' \right| && \text{de l'équation 5.1,} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|(Q_{p,c}^m(0))'|}{p^{m-1} |Q_{p,c}^m(0)|} && \text{par le lemme 5.1.5.} \end{aligned}$$

Quand $c \rightarrow \partial \mathcal{M}_1^p$, on sait que $G(c) \rightarrow 0$, d'où $\sinh(G(c)) \sim G(c)$. En supposant donc que c est assez près de la frontière de \mathcal{M}_1^p , on peut poser que $\sinh(G(c)) \approx G(c)$. Ainsi, en

utilisant les expressions précédentes pour approximer les bornes de la proposition 5.1.12, on trouve que

$$\frac{\sinh(G(c))}{2e^{G(c)}|G'(c)|} \approx \frac{\ln|Q_{p,c}^m(0)|}{2|Q_{p,c}^m(0)|^{\frac{1}{p^m-1}}p^{m-1}} \cdot \frac{p^{m-1}|Q_{p,c}^m(0)|}{\left|(Q_{p,c}^m(0))'\right|} = \frac{|Q_{p,c}^m(0)|\ln|Q_{p,c}^m(0)|}{2|Q_{p,c}^m(0)|^{\frac{1}{p^m-1}}\left|(Q_{p,c}^m(0))'\right|}$$

et

$$\frac{2\sinh(G(c))}{|G'(c)|} \approx \frac{2\ln|Q_{p,c}^m(0)|}{p^{m-1}} \cdot \frac{p^{m-1}|Q_{p,c}^m(0)|}{\left|(Q_{p,c}^m(0))'\right|} = \frac{2|Q_{p,c}^m(0)|\ln|Q_{p,c}^m(0)|}{\left|(Q_{p,c}^m(0))'\right|}. \quad \blacksquare$$

5.2 Distance d'un point à une fractale multicomplexe

Pour généraliser les bornes trouvées précédemment, on utilise les propriétés de la norme multicomplexe du chapitre 1 et des fractales multicomplexes vues au chapitre 2.

Lemme 5.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et considérons l'ensemble $X \subseteq \mathbb{M}(n)$ tel que $X = X_{\gamma_n} \times_{\gamma_n} X_{\bar{\gamma}_n}$ où $X_{\gamma_n}, X_{\bar{\gamma}_n} \subseteq \mathbb{M}(n-1)$. La distance entre le point $\zeta \in \mathbb{M}(n)$ et l'ensemble X est*

$$d(\zeta, X) = \sqrt{\frac{d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})^2}{2}}.$$

DÉMONSTRATION. Pour un point $\zeta \in \mathbb{M}(n)$ fixé, on doit trouver l'infimum des valeurs $\|\eta - \zeta\|_n$ telles que $\eta \in X$. Rappelons que, pour qu'un nombre D soit un infimum, il doit vérifier les conditions suivantes :

- i) D doit être une borne inférieure, c'est-à-dire que $D \leq \|\eta - \zeta\|_n$ pour tout $\eta \in X$;
- ii) s'il existe une autre borne inférieure C , alors $C \leq D$.

Posons $D = \sqrt{\frac{d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})^2}{2}}$ et vérifions ces deux propriétés.

- i) Comme $X = X_{\gamma_n} \times_{\gamma_n} X_{\bar{\gamma}_n}$, on sait que si $\eta \in X$, alors $\eta_{\gamma_n} \in X_{\gamma_n}$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in X_{\bar{\gamma}_n}$. De plus, puisque $d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})$ et $d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})$ sont les infimums de $\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}$ et $\|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}$ respectivement, on voit que

$$D = \sqrt{\frac{d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}}.$$

Ainsi, de la proposition 1.5.4, on trouve que pour tout $\eta \in X$,

$$D \leq \sqrt{\frac{\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}} = \|\eta - \zeta\|_n.$$

ii) Supposons qu'il existe un nombre C tel que $C \leq \|\eta - \zeta\|_n$ pour tout $\eta \in X$. On doit démontrer que $C \leq D$. Pour ce faire, supposons (par l'absurde) que $C > D$. Comme $d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})$ et $d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})$ sont des infimums, on sait qu'il existe des nombres $\eta_{\gamma_n} \in X_{\gamma_n}$ et $\eta_{\bar{\gamma}_n} \in X_{\bar{\gamma}_n}$ tels que, pour tout $\varepsilon_0 > 0$,

$$\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1} < d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1} < d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n}) + \varepsilon_0.$$

Ainsi, on calcule que

$$\begin{aligned} \|\eta - \zeta\|_n &= \sqrt{\frac{\|\eta_{\gamma_n} - \zeta_{\gamma_n}\|_{n-1}^2 + \|\eta_{\bar{\gamma}_n} - \zeta_{\bar{\gamma}_n}\|_{n-1}^2}{2}}, \\ &< \sqrt{\frac{(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + \varepsilon_0)^2 + (d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n}) + \varepsilon_0)^2}{2}}, \\ &= \sqrt{\frac{(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})^2) + 2\varepsilon_0(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})) + 2\varepsilon_0^2}{2}}. \end{aligned}$$

Sachant que $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ pour tout $x, y > 0$, on déduit que

$$\begin{aligned} \|\eta - \zeta\|_n &< \sqrt{\frac{d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n})^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})^2}{2}} + \sqrt{\frac{2\varepsilon_0(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})) + 2\varepsilon_0^2}{2}}, \\ &= D + \sqrt{\varepsilon_0(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})) + \varepsilon_0^2}. \end{aligned}$$

Posons maintenant $\varepsilon = C - D > 0$.

- Si $d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n}) = 0$, en posant $\varepsilon_0 = \varepsilon$, on trouve que

$$\|\eta - \zeta\|_n < D + \sqrt{0 + \varepsilon^2} = D + \varepsilon = C.$$

- Si $d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n}) > 0$, on choisit une valeur ε_0 telle que

$$\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon^2}{2(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n}))} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, on voit que

$$\begin{aligned} \|\eta - \zeta\|_n &< D + \sqrt{\varepsilon_0(d(\zeta_{\gamma_n}, X_{\gamma_n}) + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, X_{\bar{\gamma}_n})) + \varepsilon_0^2}, \\ &< D + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = D + \varepsilon = C. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on voit donc qu'il existe un nombre $\eta \in X$ tel que $\|\eta - \zeta\|_n < C$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que C est une borne inférieure. Ainsi, nécessairement, $C \leq D$.

Comme les deux conditions d'un infimum sont respectées, on conclut que $d(\zeta, X) = D$. ■

À partir de ce dernier résultat, on voit qu'une distance dans l'espace n -complexe peut être exprimée en fonction de distances dans l'espace $(n - 1)$ -complexe. Ainsi, on peut trouver une formule de distance entre un point ζ et une fractale multicomplexe X à l'aide de la distance entre chacune des composantes idempotentes ζ_γ et chacune des parties idempotentes X_γ . Dans le cas des ensembles de Julia, on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.2.2

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$ et posons $c \in \mathbb{M}(n)$. Alors, pour $\zeta \in \mathbb{M}(n)$, on a

$$d(\zeta, \mathcal{K}_{n,c}^p) = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} d(\zeta_\gamma, \mathcal{K}_{1,c_\gamma}^p)^2}{2^{n-1}}}.$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que, de la proposition 2.2.2,

$$\mathcal{K}_{n,c}^p = \mathcal{K}_{n-1,c_{\gamma_n}}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{K}_{n-1,c_{\bar{\gamma}_n}}^p.$$

La proposition se démontre donc essentiellement à partir de ce résultat et du lemme 5.2.1.

Procédons par induction. Pour $n = 2$, on sait que $\mathcal{K}_{2,c}^p = \mathcal{K}_{1,c_{\gamma_2}}^p \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{1,c_{\bar{\gamma}_2}}^p$. Du lemme 5.2.1, en posant $X = \mathcal{K}_{2,c}^p$, on trouve donc directement que

$$d(\zeta, \mathcal{K}_{2,c}^p) = \sqrt{\frac{d(\zeta_{\gamma_2}, \mathcal{K}_{1,c_{\gamma_2}}^p)^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_2}, \mathcal{K}_{1,c_{\bar{\gamma}_2}}^p)^2}{2}}.$$

Ensuite, démontrons que la proposition est vraie en supposant qu'elle l'est pour $n - 1$.

Pour $\zeta \in \mathbb{M}(n)$, on peut écrire

$$\zeta = \sum_{\gamma \in S_2(n)} \zeta_\gamma \gamma = \left(\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} \zeta_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \right) \gamma_n + \left(\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} \zeta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma \right) \bar{\gamma}_n,$$

d'où

$$\zeta_{\gamma_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} \zeta_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \quad \text{et} \quad \zeta_{\bar{\gamma}_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} \zeta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma.$$

De même, pour $c \in \mathbb{M}(n)$,

$$c_{\gamma_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \quad \text{et} \quad c_{\bar{\gamma}_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma.$$

Par hypothèse d'induction, on déduit donc que

$$d(\zeta_{\gamma_n}, \mathcal{K}_{n-1, c_{\gamma_n}}^p) = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(\zeta_{\gamma \cdot \gamma_n}, \mathcal{K}_{1, c_{\gamma \cdot \gamma_n}}^p)^2}{2^{n-2}}};$$

$$d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, \mathcal{K}_{n-1, c_{\bar{\gamma}_n}}^p) = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(\zeta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}, \mathcal{K}_{1, c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}}^p)^2}{2^{n-2}}}.$$

Ainsi, du lemme 5.2.1, on voit que

$$\begin{aligned} d(\zeta, \mathcal{K}_{n, c}^p) &= \sqrt{\frac{d(\zeta_{\gamma_n}, \mathcal{K}_{n-1, c_{\gamma_n}}^p)^2 + d(\zeta_{\bar{\gamma}_n}, \mathcal{K}_{n-1, c_{\bar{\gamma}_n}}^p)^2}{2}}, \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(\zeta_{\gamma \cdot \gamma_n}, \mathcal{K}_{1, c_{\gamma \cdot \gamma_n}}^p)^2 + \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(\zeta_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}, \mathcal{K}_{1, c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}}^p)^2}{2 \cdot 2^{n-2}}}, \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} d(\zeta_\gamma, \mathcal{K}_{1, c_\gamma}^p)^2}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

■

De même, on peut trouver une formule pour la distance entre un point et un Multibrot multicomplexe.

Proposition 5.2.3

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq 2$. Alors, pour $c \in \mathbb{M}(n)$, on a

$$d(c, \mathcal{M}_n^p) = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} d(c_\gamma, \mathcal{M}_1^p)^2}{2^{n-1}}}.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par induction de manière semblable à celle de la proposition 5.2.2. De la proposition 2.1.3, on sait que

$$\mathcal{M}_n^p = \mathcal{M}_{n-1}^p \times_{\gamma_n} \mathcal{M}_{n-1}^p.$$

Ainsi, si $n = 2$, on a $\mathcal{M}_2^p = \mathcal{M}_1^p \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_1^p$. On voit donc directement du lemme 5.2.1 que

$$d(c, \mathcal{M}_2^p) = \sqrt{\frac{d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p)^2 + d(c_{\bar{\gamma}_2}, \mathcal{M}_1^p)^2}{2}}.$$

Ensuite, supposons que la proposition est vraie pour $n - 1$. Pour $c \in \mathbb{M}(n)$, on sait que

$$c_{\gamma_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \gamma_n} \gamma \quad \text{et} \quad c_{\bar{\gamma}_n} = \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n} \gamma.$$

Par conséquent, on déduit par hypothèse d'induction que

$$\begin{aligned} d(c_{\gamma_n}, \mathcal{M}_{n-1}^p) &= \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(c_{\gamma \cdot \gamma_n}, \mathcal{M}_1^p)^2}{2^{n-2}}}; \\ d(c_{\bar{\gamma}_n}, \mathcal{M}_{n-1}^p) &= \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}, \mathcal{M}_1^p)^2}{2^{n-2}}}. \end{aligned}$$

Du lemme 5.2.1, on trouve donc que

$$\begin{aligned} d(c, \mathcal{M}_n^p) &= \sqrt{\frac{d(c_{\gamma_n}, \mathcal{M}_{n-1}^p)^2 + d(c_{\bar{\gamma}_n}, \mathcal{M}_{n-1}^p)^2}{2}}, \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(c_{\gamma \cdot \gamma_n}, \mathcal{M}_1^p)^2 + \sum_{\gamma \in S_2(n-1)} d(c_{\gamma \cdot \bar{\gamma}_n}, \mathcal{M}_1^p)^2}{2 \cdot 2^{n-2}}}, \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} d(c_{\gamma}, \mathcal{M}_1^p)^2}{2^{n-1}}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

En utilisant les bornes de distances complexes présentées à la section 5.1 ainsi que les propositions 5.2.2 et 5.2.3, on peut donc estimer la distance entre un point multicomplexe et une fractale.

Exemple 5.2.4. Considérons $c = c_1 + c_2 i_1 + c_3 i_2 \in \mathbb{BC}$. Sa représentation idempotente est

$$c = c_{\gamma_2} \gamma_2 + c_{\bar{\gamma}_2} \bar{\gamma}_2 = (c_1 + (c_2 - c_3) i_1) \gamma_2 + (c_1 + (c_2 + c_3) i_1) \bar{\gamma}_2.$$

- i) Si $c_{\gamma_2} \in \mathcal{M}_1^p$ et $c_{\bar{\gamma}_2} \in \mathcal{M}_1^p$, alors $d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p) = d(c_{\bar{\gamma}_2}, \mathcal{M}_1^p) = 0$, d'où $d(c, \mathcal{M}_2^p) = 0$.
 ii) Si $c_{\gamma_2} \notin \mathcal{M}_1^p$ mais $c_{\bar{\gamma}_2} \in \mathcal{M}_1^p$, alors $d(c_{\bar{\gamma}_2}, \mathcal{M}_1^p) = 0$ et

$$d(c, \mathcal{M}_2^p) = \sqrt{\frac{d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p)^2 + 0^2}{2}} = \frac{d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p)}{\sqrt{2}}$$

où $d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p) > 0$. De la proposition 5.1.13, en utilisant un entier m assez grand, les bornes de $d(c, \mathcal{M}_2^p)$ peuvent donc être approximées par

$$\frac{|c_m| \ln |c_m|}{2\sqrt{2}|c_m|^{\frac{1}{p^{m-1}}}|c'_m|} \leq d(c, \mathcal{M}_2^p) < \frac{\sqrt{2}|c_m| \ln |c_m|}{|c'_m|}$$

où $c_m = Q_{p, c_{\gamma_2}}^m(0)$ et $c'_m = \frac{d}{dc} (Q_{p, c}^m(0)) \Big|_{c=c_{\gamma_2}}$.

- iii) Si $c_{\gamma_2} \in \mathcal{M}_1^p$ mais $c_{\bar{\gamma}_2} \notin \mathcal{M}_1^p$, on retrouve des bornes similaires à celles du cas ii).
 iv) Si $c_{\gamma_2} \notin \mathcal{M}_1^p$ et $c_{\bar{\gamma}_2} \notin \mathcal{M}_1^p$, alors

$$d(c, \mathcal{M}_2^p) = \sqrt{\frac{d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p)^2 + d(c_{\bar{\gamma}_2}, \mathcal{M}_1^p)^2}{2}}.$$

où $d(c_{\gamma_2}, \mathcal{M}_1^p) > 0$ et $d(c_{\bar{\gamma}_2}, \mathcal{M}_1^p) > 0$. De la proposition 5.1.13, en posant m assez grand, on voit donc qu'on peut approximer la borne inférieure de $d(c, \mathcal{M}_2^p)$ par

$$d(c, \mathcal{M}_2^p) \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{|c_{\gamma_2, m}| \ln |c_{\gamma_2, m}|}{2|c_{\gamma_2, m}|^{\frac{1}{p^{m-1}}}|c'_{\gamma_2, m}|} \right)^2 + \left(\frac{|c_{\bar{\gamma}_2, m}| \ln |c_{\bar{\gamma}_2, m}|}{2|c_{\bar{\gamma}_2, m}|^{\frac{1}{p^{m-1}}}|c'_{\bar{\gamma}_2, m}|} \right)^2 \right)}$$

et sa borne supérieure par

$$d(c, \mathcal{M}_2^p) < \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{2|c_{\gamma_2, m}| \ln |c_{\gamma_2, m}|}{|c'_{\gamma_2, m}|} \right)^2 + \left(\frac{2|c_{\bar{\gamma}_2, m}| \ln |c_{\bar{\gamma}_2, m}|}{|c'_{\bar{\gamma}_2, m}|} \right)^2 \right)}$$

où $c_{\gamma, m} = Q_{p, c_\gamma}^m(0)$ et $c'_{\gamma, m} = \frac{d}{dc} (Q_{p, c}^m(0)) \Big|_{c=c_\gamma}$ pour $\gamma \in \{\gamma_2, \bar{\gamma}_2\}$. ▲

5.3 Méthode du lancer de rayons

Maintenant que des estimations de la distance entre un point et une fractale sont connues, il est possible d'utiliser le lancer de rayons, ou le *ray tracing*, pour générer des fractales multicomplexes. Cette méthode de synthèse d'images a été introduite dans les années 1980 [15] et est encore énormément utilisée aujourd'hui dans le domaine du cinéma et des jeux vidéos [1].

Voici un résumé de la méthode. Pour voir, une personne doit recevoir des rayons de lumière à l'oeil. Le *ray tracing* est inspiré de cette idée. On choisit un point de l'espace euclidien $P_0 \in \mathbb{R}^3$, faisant office d'oeil ou de caméra, et on lance un rayon vers la fractale à partir de celui-ci. On peut imaginer que ce rayon forme une droite qui croise P_0 et potentiellement la fractale. Lorsqu'il croise la fractale en un point, on peut faire de petits pas à partir de P_0 en suivant le rayon pour trouver le point de rencontre entre la fractale et le rayon. En répétant le procédé avec plusieurs rayons dans une multitude de direction, on peut trouver suffisamment de points de la fractale pour l'illustrer.

Décrivons la technique plus formellement pour la visualisation d'une coupe tridimensionnelle principale $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \subseteq \mathcal{M}_n^p$. Le principe demeure le même pour générer une coupe tridimensionnelle \mathcal{F} d'un ensemble de Julia $\mathcal{K}_{n,c}^p$. Mais d'abord, introduisons la notation suivante : pour tout nombre multicomplexe $P \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ tel que $P = x\mathbf{i}_k + y\mathbf{i}_l + z\mathbf{i}_m$, on écrit $[P] = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Cette notation permet de distinguer un nombre multicomplexe de sa représentation graphique tridimensionnelle.

Considérons un nombre $P_0 = x_0\mathbf{i}_k + y_0\mathbf{i}_l + z_0\mathbf{i}_m \notin \mathcal{T}$. Le point $[P_0]$ servira d'oeil extérieur à la fractale. On choisit ensuite un vecteur unitaire $[v] \in \mathbb{R}^3$ déterminant la direction du rayon lancé. Pour s'approcher de la fractale, on considère donc la séquence de points $\{P_k\}_{k=0}^\infty$ telle que $P_k = x_k\mathbf{i}_k + y_k\mathbf{i}_l + z_k\mathbf{i}_m$ et

$$P_{k+1} = P_k + d_{\inf}(P_k, \mathcal{M}_n^p) \cdot v,$$

où $d_{\inf}(P_k, \mathcal{M}_n^p)$ est la borne inférieure de la distance entre P_k et \mathcal{M}_n^p . Celle-ci peut être calculée à partir des propositions 5.1.12 et 5.2.3 comme il l'a été fait à l'exemple 5.2.4. Tous les points de cette suite sont, par définition, à l'extérieur de \mathcal{M}_n^p et, par conséquent, à l'extérieur de la coupe \mathcal{T} . Ainsi, dépendant si le rayon croise la coupe ou non, on pourra observer que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d_{\inf}(P_k, \mathcal{M}_n^p) = 0 \quad & \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{\infty} d_{\inf}(P_k, \mathcal{M}_n^p) = \infty, \\ \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P \in \partial\mathcal{T} \quad & \text{ou} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \infty. \end{aligned}$$

En pratique, on ne lance pas de rayon dans toutes les directions possibles : on pose v de manière à ce que la demi-droite $P(t) = P_0 + tv$, où $t \geq 0$, croise la boule $\overline{B_n}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$. En effet, comme on sait que les Multibrots sont contenus dans cette boule par le corollaire

2.1.5 et qu'il en est de même pour les ensembles de Julia connexes par la proposition 2.2.5, il n'est pas nécessaire d'explorer ailleurs.

De plus, on ne peut pas calculer toute la suite $\{P_k\}_{k=0}^\infty$: un critère d'arrêt est nécessaire. Posons donc $\varepsilon > 0$ assez petit et considérons $t_0 > 0$, le plus grand nombre tel que $\|P(t_0)\|_n = 2^{\frac{1}{p-1}}$.

- i) Si on atteint un nombre $P_{k_0} \in \overline{B_n}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ tel que $d_{\inf}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p) < \varepsilon$, on arrête d'itérer et on considère que le point $[P_{k_0}] \in \mathbb{R}^3$ doit être inclus dans la représentation graphique de la coupe \mathcal{T} .
- ii) Si on atteint un nombre $P_{k_0} \notin \overline{B_n}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ tel que $\|P_{k_0} - P_0\|_n > \|P(t_0) - P_0\|_n = t_0$, on peut conclure que le rayon lancé ne croise jamais la coupe. En effet, dans ce cas, on sait que le rayon entre dans la boule $\overline{B_n}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$, mais en sort éventuellement sans entrer en contact avec \mathcal{M}_n^p . On peut donc arrêter d'itérer après avoir trouvé P_{k_0} .

Pour générer une image complète, on répète ce processus avec une multitude de rayons : plus le nombre de rayons lancés est grand, plus la résolution de l'image est grande. Il est aussi possible d'améliorer la qualité des images par l'ajout d'effets visuels. Pour plus de détails, se référer à [21, 22].

Par ailleurs, cet algorithme possède un léger inconvénient. Lorsque $d_{\inf}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p)$ est petit, on sait qu'il existe un point $\eta \in \mathcal{M}_n^p$ près de P_{k_0} . Cependant, ce point ne fait pas nécessairement partie de la coupe \mathcal{T} . On peut tout de même s'assurer qu'il est près de \mathcal{T} .

Soit $\varepsilon > 0$ et k_0 , le plus petit entier tel que $P_{k_0} \in \overline{B_n}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ et $d_{\inf}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p) < \varepsilon$. De plus, posons

$$P_{k_0} = \sum_{\gamma \in S_2(n)} P_{k_0, \gamma} \gamma$$

et considérons l'ensemble $S := \{\gamma \in S_2(n) : P_{k_0, \gamma} \notin \mathcal{M}_1^p\}$. Pour tout $\gamma \in S$, de la proposition 5.1.12, on sait que

$$d_{\inf}(P_{k_0, \gamma}, \mathcal{M}_1^p) := \frac{\sinh(G(P_{k_0, \gamma}))}{2e^{G(P_{k_0, \gamma})}|G'(P_{k_0, \gamma})|} \quad \text{et} \quad d_{\sup}(P_{k_0, \gamma}, \mathcal{M}_1^p) := \frac{2 \sinh(G(P_{k_0, \gamma}))}{|G'(P_{k_0, \gamma})|}$$

sont des bornes inférieure et supérieure de $d(P_{k_0, \gamma}, \mathcal{M}_1^p)$. Aussi, par le corollaire 1.5.6, on remarque que

$$\|P_{k_0}\|_n = \sqrt{\frac{\sum_{\gamma \in S_2(n)} |P_{k_0, \gamma}|^2}{2^{n-1}}} \geq \frac{|P_{k_0, \gamma}|}{\sqrt{2^{n-1}}} \quad \text{pour tout } \gamma \in S_2(n).$$

Comme $\|P_{k_0}\|_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$, on vérifie ainsi que $|P_{k_0, \gamma}| \leq \sqrt{2^{n-1}} \|P_{k_0}\|_n \leq \sqrt{2^{n-1}} 2^{\frac{1}{p-1}}$. Par conséquent, comme G est une fonction continue et $G(P_{k_0, \gamma})$ devient petit lorsque $P_{k_0, \gamma}$ est près de \mathcal{M}_1^p , la valeur $G(P_{k_0, \gamma})$ doit être bornée. Ainsi, il existe un certain $M \geq 0$ tel que $e^{G(P_{k_0, \gamma})} \leq M$, d'où

$$d_{\sup}(P_{k_0, \gamma}, \mathcal{M}_1^p) = 4e^{G(P_{k_0, \gamma})} d_{\inf}(P_{k_0, \gamma}, \mathcal{M}_1^p) \leq 4M d_{\inf}(P_{k_0, \gamma}, \mathcal{M}_1^p).$$

En utilisant la proposition 5.2.3, on peut généraliser cette observation pour trouver que

$$d_{\sup}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p) \leq 4M d_{\inf}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p), \quad (5.2)$$

où $d_{\sup}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p)$ est la borne supérieure de $d(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p)$ qui peut être calculée à partir des propositions 5.1.12 et 5.2.3.

Posons maintenant $\eta \in \mathcal{M}_n^p$, l'élément de \mathcal{M}_n^p le plus près de P_{k_0} . On sait qu'un tel nombre existe car \mathcal{M}_n^p est compact. De l'équation 5.2, on voit que,

$$\|P_{k_0} - \eta\|_n = d(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p) < d_{\sup}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p) \leq 4M d_{\inf}(P_{k_0}, \mathcal{M}_n^p) < 4M\varepsilon.$$

De plus, en posant $\eta = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n)} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i}$ et $I = \mathbb{I}(n) \setminus \{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m\}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|P_{k_0} - \eta\|_n &= \left\| (x_{k_0} - \eta_{\mathbf{i}_k}) \mathbf{i}_k + (y_{k_0} - \eta_{\mathbf{i}_l}) \mathbf{i}_l + (z_{k_0} - \eta_{\mathbf{i}_m}) \mathbf{i}_m - \sum_{\mathbf{i} \in I} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \right\|_n, \\ &\geq \left\| \sum_{\mathbf{i} \in I} \eta_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \right\|_n, \\ &\geq |\eta_{\mathbf{i}}| \quad \text{pour tout } \mathbf{i} \in I. \end{aligned}$$

Par conséquent, $4M\varepsilon > \|P_{k_0} - \eta\|_n \geq |\eta_{\mathbf{i}}| \geq 0$ pour tout $\mathbf{i} \in I$. Ainsi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve que $|\eta_{\mathbf{i}}| \rightarrow 0$ pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{I}(n)$ tel que $\mathbf{i} \notin \{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m\}$. On en déduit donc que η est un nombre très près de l'espace $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ lorsque ε est très petit et, conséquemment, très près de la coupe \mathcal{T} . Le point P_{k_0} est donc suffisamment près de \mathcal{T} pour utiliser $[P_{k_0}] \in \mathbb{R}^3$ afin d'illustrer \mathcal{T} .

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire était de généraliser et d'unifier plusieurs résultats déjà connus sur les fractales multicomplexes ainsi que les espaces dans lesquels elles sont définies. Effectivement, au premier chapitre, plusieurs concepts entourant les espaces multicomplexes ont été étudiés afin de les introduire au lecteur, mais aussi pour étendre certaines propriétés des nombres complexes, bicomplexes et tricomplexes au cas général n -complexe. Ensuite, les fractales complexes les mieux connues, c'est-à-dire les ensembles de Mandelbrot et de Julia, et certaines de leurs propriétés ont été, elles aussi, généralisées aux espaces multicomplexes au deuxième chapitre. Par la suite, on a vu, au troisième chapitre, deux types de coupes fractales tridimensionnelles, permettant ainsi d'obtenir des images en trois dimensions de ces objets. De plus, une relation d'équivalence a été définie entre les coupes principales afin d'identifier celles qui possèdent des dynamiques tridimensionnelles similaires. Cette équivalence a permis, au quatrième chapitre, de classifier les coupes et ainsi de déterminer que toute coupe tridimensionnelle principale de \mathcal{M}_n^p peut être retrouvée, à une transformation affine près, dans l'espace tricomplexe. Finalement, la méthode du lancer de rayons, permettant de générer numériquement ces coupes, a été présentée au cinquième chapitre après avoir généralisé la distance entre un point et une fractale, qui est une notion nécessaire à l'implémentation de cette méthode.

Malgré tout ce qui a été abordé dans ce mémoire, certains aspects sont encore à approfondir. Par exemple, il a été démontré au troisième chapitre que si deux coupes principales sont équivalentes, elles doivent nécessairement être liées par une transformation linéaire. Toutefois, on peut observer par ordinateur que deux coupes équivalentes semblent toujours isométriques. Pour arriver à démontrer que ce constat est toujours vrai, il faudrait démontrer que l'isomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ formant une bijection entre deux coupes équivalentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 n'est pas seulement linéaire, mais aussi isométrique.

Par ailleurs, la méthode du lancer de rayons n'a été présentée que brièvement. En effet, il serait possible d'approfondir cette méthode afin d'optimiser l'algorithme ou encore d'améliorer la qualité et le niveau de détail des images. Aussi, il pourrait être intéressant de modifier l'algorithme afin de s'assurer qu'il converge nécessairement vers des points de la coupe à visualiser, plutôt que vers des points près de la coupe.

Bref, l'écriture de ce mémoire a permis de rassembler dans un même document plusieurs notions sur les fractales multicomplexes étudiées ces dernières années. Il en reste néanmoins beaucoup à faire, en particulier sur les autres types de coupes tridimensionnelles. En effet, les coupes idempotentes et les coupes tridimensionnelles des ensembles de Julia n'ont pas été approfondies. Un prochain travail pourrait donc porter sur la classification de celles-ci. Toutefois, comme il existe un ensemble de Julia pour chaque nombre $c \in \mathbb{M}(n)$, classifier les coupes tridimensionnelles de ces ensembles ne s'annonce pas évident.

Bibliographie

- [1] T. AKENINE-MÖLLER, E. HAINES et N. HOFFMAN : *Real-Time Rendering*. AK Peters/CRC Press, quatrième édn, 2018.
- [2] L. BARIBEAU et T. RANSFORD : Cross-sections of multibrot sets. *The Journal of Analysis*, 24(1):95–101, juin 2016.
- [3] A. F. BEARDON : *Iteration of Rational Functions : Complex Analytic Dynamical Systems*, vol. 132 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, première édn, 1991.
- [4] G. BROUILLETTE, P.-O. PARISÉ et D. ROCHON : Tricomplex distance estimation for filled-in Julia sets and Multibrot sets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 29(6):1950085, juin 2019.
- [5] G. BROUILLETTE et D. ROCHON : Characterization of the principal 3D slices related to the multicomplex Mandelbrot set. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 29(3):39, juil. 2019.
- [6] P. J. CAMERON : *Introduction to Algebra*. Oxford Mathematics. Oxford University Press, deuxième édn, 2008.
- [7] J. B. CONWAY : *A Course in Functional Analysis*, vol. 96 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, deuxième édn, 1985.
- [8] H. S. M. COXETER et S. L. GREITZER : *Geometry Revisited*, vol. 19 de *New Mathematical Library*. Mathematical Association of America, 1967.
- [9] Y. DANG, L. H. KAUFFMAN et D. J. SANDIN : *Hypercomplex Iterations : Distance Estimation and Higher Dimensional Fractals*. World Scientific, 2002.
- [10] A. DOUADY et J. H. HUBBARD : Itération des polynômes quadratiques complexes. *In Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, vol. 294 de *Série I - Mathématiques*, p. 123–126. Académie des sciences, Paris, jan. 1982.

- [11] A. DOUADY et J. H. HUBBARD : Étude dynamique des polynômes complexes (première partie). Publications Mathématiques d'Orsay, 1984.
- [12] V. GARANT-PELLETIER : Ensembles de Mandelbrot et de Julia classiques, généralisés aux espaces multicomplexes et théoreme de Fatou-Julia généralisé. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, mars 2011.
- [13] V. GARANT-PELLETIER et D. ROCHON : On a generalized Fatou-Julia theorem in multicomplex spaces. *Fractals*, 17(3):241–255, 2009.
- [14] B. R. GELBAUM : *Modern Real and Complex Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [15] J. C. HART, D. J. SANDIN et L. H. KAUFFMAN : Ray tracing deterministic 3-D fractals. In *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, vol. 23, p. 289–296. ACM, juil. 1989.
- [16] M. HAZEWINKEL, N. GUBARENI et V. V. KIRICHENKO : *Algebras, Rings and Modules : Volume 1*, vol. 575 de *Mathematics and Its Applications*. Springer, Pays-Bas, 2004.
- [17] A. KATUNIN : On the convergence of multicomplex M-J sets to the Steinmetz hypersolids. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 15(3), 2016.
- [18] A. KATUNIN : *A Concise Introduction to Hypercomplex Fractals*. CRC Press, 2017.
- [19] T.-Y. LAM : *A First Course in Noncommutative Rings*, vol. 131 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, deuxième édn, 2001.
- [20] S. LIPSCHUTZ et M. L. LIPSON : *Linear Algebra*. Schaum's Outline. McGraw-Hill, quatrième édn, 2009.
- [21] É. MARTINEAU : Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot généralisé. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, déc. 2004.
- [22] É. MARTINEAU et D. ROCHON : On a bicomplex distance estimation for the Tetra-brot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(9):3039–3050, 2005.
- [23] E. S. MECKES et M. W. MECKES : *Linear Algebra*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 2018.
- [24] J. MILNOR : *Dynamics in One Complex Variable : Introductory Lectures*. Springer Vieweg, deuxième édn, 2000.

- [25] M. E. MORTENSON : *Geometric Transformations for 3D Modeling*. Industrial Press Inc., New York, 2007.
- [26] P.-O. PARISÉ : Les ensembles de Mandelbrot tricomplexes généralisés aux polynômes $\zeta^p + c$. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, juin 2017.
- [27] P.-O. PARISÉ, T. RANSFORD et D. ROCHON : Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of even degree. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, 1:37–48, jan. 2017.
- [28] P.-O. PARISÉ et D. ROCHON : A study of dynamics of the tricomplex polynomial $\eta^p + c$. *Nonlinear Dynamics*, 82(1–2):157–171, oct. 2015.
- [29] P.-O. PARISÉ et D. ROCHON : Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of odd degree. *Fractals*, 25(3):1–11, 2017.
- [30] G. B. PRICE : *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*. Marcel Dekker, Inc., 1991.
- [31] D. ROCHON : Sur une généralisation des nombres complexes : les tétranombres. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, août 1997.
- [32] D. ROCHON : A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 8(4):355–368, 2000.
- [33] D. ROCHON : On a generalized Fatou-Julia theorem. *Fractals*, 11(3):213–219, 2003.
- [34] D. C. STRUPPA, A. VAJIAC et M. B. VAJIAC : Holomorphy in multicomplex spaces. *In Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations*, p. 617–634. Springer, 2012.
- [35] A. VAJIAC et M. B. VAJIAC : Multicomplex hyperfunctions. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57(7–8):751–762, 2012.
- [36] A. VALLIÈRES : Dynamique tricomplexe et solides de Platon. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, en rédaction.
- [37] X.-y. WANG et W.-j. SONG : The generalized M–J sets for bicomplex numbers. *Nonlinear Dynamics*, 72(1–2):17–26, 2013.
- [38] H. J. WOERDEMAN : *Advanced Linear Algebra*, vol. 38 de *Textbooks in Mathematics*. CRC Press, 2015.

Définitions de base

Cette annexe a comme but de rappeler certains concepts préalables à la lecture de ce mémoire.

Structures algébriques

On présente ici les définitions de certaines structures algébriques essentielles. Les prochaines définitions sont tirées de l'ouvrage de Cameron [6].

Définition – Groupe

Soit un ensemble E sur lequel on définit une opération binaire $*$. La structure $(E, *)$ est un *groupe* si

- i) $x * y \in E$ pour tout $x, y \in E$ ($*$ est *fermée* sur E);
- ii) $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tout $x, y, z \in E$ ($*$ est *associative* sur E);
- iii) il existe un neutre $e \in E$ pour $*$, c'est-à-dire que $x * e = e * x = x$ pour tout $x \in E$;
- iv) tout $x \in E$ possède un inverse x^{-1} tel que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté concernant l'opération, on écrit simplement que E est un groupe. De plus, E est un groupe *commutatif* si $*$ est commutative sur E , c'est-à-dire que $x * y = y * x$ pour tout $x, y \in E$.

En définissant une deuxième opération sur un groupe, on peut obtenir un anneau ou encore un corps.

Définition – Anneau

Soit un ensemble E sur lequel on définit deux opérations binaires $+$ et \bullet . La structure $(E, +, \bullet)$ est un *anneau* si $(E, +)$ est un groupe commutatif et

- i) \bullet est fermée sur E ;
- ii) \bullet est associative sur E ;
- iii) \bullet est distributive à gauche et à droite, c'est-à-dire que pour tout $x, y, z \in E$,

$$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z \quad \text{et} \quad (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté concernant les opérations, on écrit simplement que E est un anneau. De plus, s'il existe un neutre pour \bullet , alors E est un anneau *unitaire*. Aussi, E est un anneau *commutatif* lorsque \bullet est commutative sur E .

Définition – Corps

Soit un anneau unitaire commutatif $(E, +, \bullet)$ dont l'élément neutre pour $+$ est noté 0. On dit que E est un *corps* si tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$ possède un inverse par rapport à l'opération \bullet . Par ailleurs, on appelle généralement $+$ l'addition sur E et \bullet la multiplication sur E .

Considérons un ensemble quelconque E . Dans les définitions précédentes, des opérations internes sur E étaient utilisées. Cependant, il est aussi possible de définir un opérateur externe, comme une multiplication par un scalaire, qui agit sur un élément d'un corps \mathbb{K} et sur un élément de E .

Définition – Espace vectoriel

Soit un corps \mathbb{K} doté d'une addition et d'une multiplication. Considérons un ensemble E , une opération binaire $+$: $E \times E \rightarrow E$ et une multiplication par un scalaire \cdot : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$. La structure $(E, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* si

- i) $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
- ii) la multiplication par un scalaire est distributive, c'est-à-dire que pour tout pour tout $\mu, \nu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\mu \cdot (x + y) = \mu \cdot x + \mu \cdot y \quad \text{et} \quad (\mu + \nu) \cdot x = \mu \cdot x + \nu \cdot x;$$

- iii) pour tout $\mu, \nu \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a que $(\mu\nu) \cdot x = \mu \cdot (\nu \cdot x)$;
- iv) le neutre multiplicatif 1 du corps \mathbb{K} est aussi le neutre pour \cdot , c'est-à-dire que $1 \cdot x = x$ pour tout $x \in E$.

Définition – Espace vectoriel engendré

Soit un espace vectoriel E sur un corps \mathbb{K} . Pour tout sous-ensemble fini $A \subseteq E$, on note $\text{Vect}_{\mathbb{K}}A$ le *sous-espace vectoriel de E engendré par A* , c'est-à-dire

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}}A = \left\{ \sum_{x \in A} \lambda_x x \ : \ \lambda_x \in \mathbb{K} \right\}.$$

Autrement dit, $\text{Vect}_{\mathbb{K}}A$ représente l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A .

Un espace vectoriel E peut se généraliser à une algèbre en définissant une deuxième opération interne sur E . La définition suivante est proposée par Conway [7].

Définition – Algèbre

Soit un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur un corps \mathbb{K} . Considérons une opération binaire $\bullet : E \times E \rightarrow E$. La structure $(E, +, \cdot, \bullet)$ est une *algèbre* sur \mathbb{K} si $(E, +, \bullet)$ forme un anneau et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\lambda \cdot (x \bullet y) = (\lambda \cdot x) \bullet y = x \bullet (\lambda \cdot y).$$

De plus, lorsque \bullet est commutative, E est une algèbre *commutative* et lorsqu'il existe un neutre pour \bullet , E est une algèbre *unitaire*.

De manière équivalente, on pourrait définir que $(E, +, \cdot, \bullet)$ est une algèbre sur \mathbb{K} si

- i) $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel ;
- ii) \bullet est associative ;
- iii) \bullet est bilinéaire, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y, z \in E$:
 - a) $\lambda \cdot (x \bullet y) = (\lambda \cdot x) \bullet y = x \bullet (\lambda \cdot y)$;
 - b) $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$;
 - c) $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$.

Fonctions particulières sur les structures algébriques

Il est souvent nécessaire de définir des applications sur les diverses structures algébriques mentionnées précédemment. Voici quelques types particuliers de fonctions qui sont utilisés à maintes reprises au cours du mémoire. Les prochaines définitions s'inspirent des ouvrages de Cameron [6], Conway [7] et Woerdeman [38].

Définition – Norme

Soit un espace vectoriel E sur un corps \mathbb{K} muni d'une valeur absolue. Notons $\mathbf{0}$ le neutre de E . Une *norme* sur E est une application réelle $\|\cdot\|$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

- i)* $\|x\| \geq 0$;
- ii)* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$;
- iii)* $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- iv)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est dit *normé*.

Notons qu'une norme peut aussi être définie dans le cas plus général où E est une algèbre.

Par ailleurs, il est possible d'établir un lien entre divers espaces en utilisant une bijection particulière : un isomorphisme.

Définition – Homomorphisme

Considérons E_1 et E_2 , deux structures algébriques de même type. Un *homomorphisme* est une application $f : E_1 \rightarrow E_2$ qui conserve la structure des opérations. Plus spécifiquement, f est une application ayant les propriétés suivantes :

- i) Si une seule opération interne, par exemple une addition, est définie sur chaque structure E_1 et E_2 , alors

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in E_1.$$

- ii) Si une deuxième opération interne, par exemple une multiplication, est définie sur chaque structure E_1 et E_2 (cas des anneaux et des algèbres), alors

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in E_1.$$

- iii) Si des multiplications par un scalaire sont définies sur E_1 et E_2 (cas des espaces vectoriels et des algèbres sur \mathbb{K}), alors

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E_1.$$

Un homomorphisme d'espaces vectoriels ou d'algèbres est aussi appelé une *application linéaire*.

Définition – Isomorphisme

Considérons E_1 et E_2 , deux structures algébriques de même type. Un *isomorphisme* est un homomorphisme bijectif $f : E_1 \rightarrow E_2$. Lorsqu'il existe un isomorphisme $f : E_1 \rightarrow E_2$, on dit alors que E_1 et E_2 sont *isomorphes*.

Dans le même ordre d'idée, si on considère deux espaces normés E_1 et E_2 , il est parfois possible de trouver une isométrie entre ces deux espaces.

Définition – Isométrie

Soit E_1 et E_2 , deux espaces vectoriels ou deux algèbres normés. Si l'application linéaire $f : E_1 \rightarrow E_2$ est telle que $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E_1$, alors f est une *isométrie* et on dit que E_1 et E_2 sont *isométriques*.

Définition – Isomorphisme isométrique

Si $f : E_1 \rightarrow E_2$ est à la fois un isomorphisme et une isométrie, alors on l'appelle un *isomorphisme isométrique* et on dit que E_1 et E_2 sont *isométriquement isomorphes*.

Analyse

Au chapitre 1, on explore les propriétés des espaces multicomplexes. En particulier, on vérifie que l'espace vectoriel des nombres multicomplexes est un espace de Banach. La définition de ce concept se retrouve en particulier dans le livre de Conway [7].

Définition – Suite de Cauchy

Soit un espace vectoriel normé E . Une *suite de Cauchy* est une suite $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subseteq E$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Définition – Espace de Banach

Soit un espace vectoriel normé E . Si toute suite de Cauchy de E converge dans E , alors E est un espace *complet* ou encore un *espace de Banach*.

Le concept d'espace de Banach, applicable aux espaces vectoriels, peut être généralisé aux algèbres.

Définition – Algèbre de Banach

Soit une algèbre normée E . On dit que E est une *algèbre de Banach* si

- i) l'espace vectoriel normé E est un espace de Banach ;
- ii) pour tout $x, y \in E$, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Analyse complexe

Les prochains concepts d'analyse complexe peuvent être retrouvés dans le livre de Gelbaum [14].

Définition – Dérivée complexe

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ où $U \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Pour $z_0 \in U$, on dit que f est *dérivable* en z_0 si la limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. La limite $f'(z_0)$ est alors la *dérivée* de f en z_0 .

Définition – Fonction holomorphe

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ où $U \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Si f est dérivable pour tout point d'un ensemble ouvert contenant $z_0 \in U$, on dit alors qu'elle est *holomorphe* en z_0 . En particulier, si f est dérivable en tout point de son domaine ouvert U , alors f est holomorphe sur U .

Lorsque f est inversible, si f et f^{-1} sont holomorphes, on dit que f est *biholomorphe*.

Comme toute fonction holomorphe possède un développement en série de puissances convergente, toute fonction holomorphe est analytique au sens suivant.

Définition – Fonction analytique

Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ où $U \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Pour $z_0 \in U$, on dit que f est *analytique* en z_0 s'il existe des coefficients $a_j \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

pour tout z dans un certain voisinage $V(z_0, r)$ de z_0 .

Topologie

Pour bien saisir les notions de connexité et de compacité utilisées à quelques reprises dans ce mémoire, les définitions suivantes peuvent s'avérer utiles. Elles sont tirées de l'ouvrage de Gelbaum [14].

Définition – Espace topologique

Soit E , un ensemble quelconque et T , une famille de sous-ensembles de E (autrement dit, tout élément de T est un sous-ensemble de E). On dit que (E, T) est un *espace topologique* si

- i) $\emptyset \in T$ et $E \in T$;
- ii) toute union d'éléments de T est aussi dans T ;
- iii) toute intersection finie d'éléments de T est aussi dans T .

De plus, on dit que T est une *topologie*. Généralement, T est l'ensemble de tous les ouverts de E . Aussi, lorsque la topologie T est évidente, on dit simplement que E est un espace topologique.

Comme la notion d'espace topologique n'est pas centrale à ce mémoire, on peut simplement voir un espace topologique comme étant un ensemble tel que l'union et l'intersection habituelles sont bien définies sur ses sous-ensembles. D'ailleurs, il est possible d'établir un lien entre différents espaces topologiques à l'aide d'un homéomorphisme.

Définition – Homéomorphisme

Soit deux espaces topologiques E_1 et E_2 . Si l'application $f : E_1 \rightarrow E_2$ est bijective et bicontinue, c'est-à-dire qu'elle et son inverse sont continues, on dit alors qu'elle est un *homéomorphisme*. Lorsqu'il existe un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, on dit qu'ils sont *homéomorphes*.

De plus, il est possible d'attribuer aux éléments d'un espace topologique certaines propriétés, telles que la connexité ou la compacité.

Définition – Connexité

Soit un espace topologique E . Un ensemble $A \subseteq E$ est *connexe* s'il ne peut pas être exprimé comme l'union de deux sous-ensembles ouverts, non vides et disjoints.

Définition – Compacité

Soit un espace topologique E et considérons un ensemble $A \subseteq E$. Pour toute famille d'ensembles ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ telle que $U_i \subseteq A \forall i \in I$ et $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, si on peut trouver une sous-famille finie $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ telle que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$, on dit alors que A est *compact*. Dans le cas où E est homéomorphe à \mathbb{R}^n , on a alors que A est compact ssi A est *borné* et *fermé* (théorème de Heine-Borel).

Dans [14], on vérifie que si deux espaces sont homéomorphes et l'un d'eux est connexe ou compact, ce doit nécessairement être le cas pour l'autre. Ce résultat permet de généraliser la connexité et la compacité des fractales complexes aux fractales multicomplexes, comme il a été fait au chapitre 2.